UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Risommazione di gluoni soffici in processi di Drell-Yan in QCD

Relatore interno: prof. Giuseppe MARCHESINI

Relatore esterno: dott. Paolo NASON

Tesi di Laurea di

Marco CIRELLI

matr. 506387

codici PACS: 12.38.Cy, 13.85

Anno Accademico 1999–2000. Prima Sessione. Luglio 2000

A mio papà

Risommazione di gluoni soffici in processi di Drell-Yan in QCD

di Marco Cirelli

Luglio 2000

Indice

Elenco delle figure

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cenni di QCD

La Cromodinamica Quantistica (QCD) è la teoria quantistica di campo, sviluppata a partire dall'inizio degli anni '70, che si occupa di descrivere le interazioni forti. In quanto teoria di gauge, essa ha notevoli somiglianze con l'Elettrodinamica Quantistica (QED), preposta allo studio delle interazioni elettromagnetiche, ma anche importantissime differenze. Può essere utile, per iniziare, tracciare i fondamenti dei due modelli in parallelo.

Nella QED la "materia prima" della teoria (ossia i campi di materia che compaiono nella Lagrangiana) sono i leptoni (elettrone e successive famiglie), mentre nella QCD si introducono i quark, particelle elementari fermioniche di 6 diversi sapori, con differenti cariche elettriche (frazionarie) e differenti masse a riposo, che sono i costituenti degli adroni. I quark u, d, s vengono spesso indicati come "leggeri", i quark c, b, t "pesanti".Le interazioni sono mediate dai campi bosonici detti gluoni; nella QED lo stesso ruolo è svolto dai fotoni.

Sapori	Carica elettrica	Massa
u	$2/3\ e$	$1.5 \div 5\ MeV$
d	$-1/3\ e$	$3 \div 9\ MeV$
s	$-1/3\ e$	$60 \div 170\ MeV$
c	$2/3\ e$	$\sim 1.5\ GeV$
b	$-1/3\ e$	$\sim 5\ GeV$
t	$2/3\ e$	$\sim 175\ GeV$

La QCD è caratterizzata da una costante di accoppiamento α_s (analoga alla costante di struttura fine α_{em}): essa ha un valore che dipende dalla scala di energia μ^2 (scala di rinormalizzazione); questa scala, in generale, va scelta dell'ordine dell'energia caratteristica del processo in esame. Si ha (a meno di correzioni di ordine superiore, cfr.Appendice B)

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{b_0 \ln(\mu^2/\Lambda^2_{QCD})} \tag{1.1}$$

dove Λ_{QCD} ($\sim 200MeV$) assume il ruolo di scala energetica tipica della teoria che, in un senso che chiariremo in seguito, ne determina il range di applicabilità.

Questa tipo di dipendenza dalla scala è una proprietà di ogni teoria di campo, che segue dalla rinormalizzazione, e infatti anche in QED vale una relazione del tutto analoga. In QCD però assume una valenza importante per due motivi sostanziali:

- la scala limite di QED (Λ_{QED}) si colloca a valori di energia estremamente elevati, di ordine astronomico; di conseguenza, nel range di energie sondate dagli esperimenti si può a buon diritto ritenere quasi fissata la costante α_{em}; non è così per la QCD: la variazione con l'energia è importante soprattutto agli ordini di grandezza accessibili sperimentalmente;

- b_0 in QCD è di segno positivo, mentre è negativo in QED: questo significa che la prima è una teoria debolmente accoppiata ad alte energie e fortemente accoppiata a basse energie, mentre è il contrario per la seconda; questo è il contenuto dell'affermazione che la QCD è una teoria asintoticamente libera, mentre la QED non lo è.

Le differenze evidenziate sono dovute sostanzialmente al diverso valore (e segno) di b_0 per le due teorie: questo a sua volta discende dal fatto che il gruppo della simmetria di gauge della QED ($U(1)$) è abeliano, mentre quello della QCD (il gruppo della simmetria di colore $SU(3)$) è non-abeliano. E' questa proprietà che dona alla QCD la capacità di spiegare le basilari osservazioni sperimentali sul mondo delle interazioni forti.

Questa stessa proprietà è all'origine del fatto che in QCD sono possibili le interazioni (i vertici) a tre o quattro gluoni, mentre in QED i fotoni non sono accoppiati direttamente tra loro.

Le predizioni di una teoria di campo si basano sovente sull'uso della teoria perturbativa. Come è noto, alla radice di questo approccio sta il considerare le interazioni come perturbazioni all'Hamiltoniana dei sistemi interagenti, appellandosi al fatto che la costante di accoppiamento (α_s nel nostro caso) è un parametro "piccolo" ($\ll 1$). Si tenta quindi di esprimere le osservabili cercate come serie di potenze nella costante di accoppiamento stessa. E' chiaro che la validità di un tale approccio è limitata ai regimi in cui effettivamente la costante di accoppiamento è un parametro "piccolo".

La QCD perturbativa (P-QCD) si mostra adatta quindi allo studio di interazioni tra quark (e gluoni) caratterizzate da una grossa scala di energia, che sia molto superiore alla scala Λ_{QCD}.

E' un fatto, però, che gli oggetti "naturali" che possiamo sottoporre ad esperimenti (per esempio di scattering) non sono i quark ma gli adroni, e la P-QCD non può essere applicata a sistemi caratterizzati da bassa energia ($\sim 1\ GeV$, massa del protone) quali sono gli adroni, intesi come stati legati di quark (e gluoni). Quello di cui abbiamo bisogno è un modello che fornisca il legame fenomenologico tra il livello adronico e il regime perturbativo delle interazioni forti.

Questo legame è dato dal cosiddetto Modello a Partoni: in un processo di collisione protone-antiprotone, per esempio, si pensa all'adrone come a un sistema debolmente legato di quark e gluoni (detti collettivamente partoni), cui sono associate delle funzioni di densità ("parton density functions: pdf's"), determinabili solo sperimentalmente, e che interagiscono fortemente con i partoni dell'altro adrone ("processo partonico", o "di corta distanza").

La QCD perturbativa, nell'ambito del Modello a Partoni, quindi, può essere usata per lo studio dei fenomeni di collisioni adroniche con produzione di oggetti di grande massa invariante. Quest'ultima condizione serve proprio a garantire che il processo partonico avvenga ad una scala energetica elevata.

Utilizzando la QCD perturbativa, si calcola di un processo la quantità partonica (ad esempio la sezione d'urto) come serie nella costante α_s. In linea teorica, è lecito procedere fino a qualsiasi ordine perturbativo: le difficoltà sono solo di natura tecnica[1], in quanto si vanno considerando grafici di Feynman sempre più complessi. Entro certi limiti, maggiore è l'ordine che si riesce a raggiungere e al quale si tronca la serie perturbativa, migliore è l'accuratezza della previsione. Del tutto schematicamente, possiamo affermare che la struttura di una grandezza come la sezione d'urto totale è

$$\sigma = \sigma_0(1 + \alpha_s\ a_1 + \alpha_s^2\ a_2 + \dots) \tag{1.2}$$

essendo σ_0 la sezione d'urto al primo ordine (livello di Born, livello "albero").

[1]...ma spesso sono insormontabili oltre il Next to Leading Order.

1.2 Correzioni logaritmiche e risommazione

In particolari regimi cinematici, però, compaiono grosse correzioni, in forma di logaritmi ℓ ("logaritmi di Sudakov"), ad ogni ordine perturbativo, che accompagnano la costante di accoppiamento.

In generale si osserva che la quantità che governa lo sviluppo in serie non è più semplicemente α_s ma invece[2]

$$\alpha_s^n \ell^m \tag{1.3}$$

E' chiaro che le assunzioni della teoria perturbativa standard vanno riviste: per esempio, in questa situazione un termine come $\alpha_s^2 \ell^3$ può essere più rilevante di un termine $\alpha_s \ell$, che pure appartiene ad un ordine perturbativo precedente: la grandezza di ℓ, infatti, può compensare e soverchiare la piccolezza di α_s.

A grandi linee, quello che si passa a fare è classificare in modo nuovo i termini dello sviluppo perturbativo: i contributi più importanti sono considerati quelli con $m - n$ più grande e via via gli altri. Al posto di troncare la serie ad un certo ordine di α_s, si sceglie di troncare in corrispondenza di un certo valore di $m - n$ e bisogna essere in grado di *risommare* a tutti gli ordini perturbativi i termini tenuti.

In linea generale, questi grossi termini logaritmici hanno origine quando entrano in gioco due scale di energia o di momento molto diverse. In questa situazione capita che la radiazione di bremsstrahlung (la radiazione di gluoni soffici dallo stato iniziale - o finale -) divenga molto importante per il calcolo delle grandezza macroscopiche.

Il più semplice processo di collisione adronica, e anche il più studiato, è il cosiddetto processo di Drell-Yan: la produzione di una coppia (di grande massa invariante) leptone-antileptone l^+l^- in una collisione adronica, dall'annichilazione di un quark ed un antiquark (contenuti negli adroni incidenti) in un fotone virtuale massivo (fig.2.1 a pag.10):

$$A + B \to \gamma^* + X \qquad\qquad \gamma^* \to l^+ + l^- \tag{1.4}$$

Riguardo alle correzioni logaritmiche in questo tipo di processo, due grandezze in particolare sono state studiate negli ultimi venti anni:

1. la distribuzione di momento trasverso $q_\perp$ della coppia leptonica, nella regione di piccolo momento trasverso ($q_\perp \ll Q^2$, essendo Q^2 la massa invariante della coppia prodotta) e

[2] Nei fenomeni di risommazione di gluoni soffici che analizzeremo, al massimo si producono termini con $m = 2n$.

2. la sezione d'urto totale alla soglia, ossia nella situazione in cui la massa invariante della coppia prodotta assorbe quasi tutta l'energia della collisione adronica.

Nel primo caso le due scale molto diverse sono costituite dal piccolo momento trasverso e dalla grande massa invariante della coppia prodotta, e le correzioni sono in forma di logaritmi del loro rapporto. Nel secondo dalla grande energia del processo partonico e dal piccolo avanzo lasciato a disposizione della radiazione di bremsstrahlung, e le correzioni sono costituite dai logaritmi della "distanza dalla soglia".

Il processo di Drell-Yan è solo più semplice in cui studiare questo tipo di effetti. In realtà sono possibili una serie di estensioni ad altri processi di collisione adrone-adrone:

- produzione di Z e $W^{\pm}$, al posto del fotone virtuale (questo in realtà è ancora il processo di Drell-Yan, con un diverso bosone intermedio),
- produzione di una coppia di quark pesanti ($b\bar{b}$, $t\bar{t}$), al posto della coppia leptonica,
- produzione di getti adronici.

Alcuni esempi di grandezze interessanti in questi processi sono:

- la distribuzione di momento trasverso di Z e $W^{\pm}$,
- la distribuzione di momento trasverso di una coppia di $b\bar{b}$,
- le grandezze relative alla produzione di $top - anti$-top al Tevatron,

e molte altre.

Lo studio delle grandezze relative al quark *top* da solo basterebbe a giustificare lo sforzo, considerato anche l'interesse che si svilupperà nell'immediato futuro per questa particella recentemente osservata. Ad esempio, le tecniche per la ricostruzione della sua massa richiedono spesso la conoscenza delle distribuzioni rispetto al momento trasverso (e alla rapidità) della coppia $t\bar{t}$ prodotta, per poter discriminare quali delle particelle rilevate dal decadimento siano da risommare. La stessa sezione d'urto totale di produzione della coppia $t\bar{t}$ è un esempio di grandezza che risente degli effetti in esame, in quanto caratterizzata dal regime di soglia. Questo genere di grandezze saranno presto oggetto di approfondito studio sperimentale nell'ambito del Run II al Tevatron (Fermilab).

Altri motivi teorici più generali consigliano lo studio della fisica di produzione in questi particolari regimi delle particelle elencate e di molte altre (cfr. per esempio [28] [30] [32] [33] [36]); tra questi citiamo:

- la determinazione delle pdf's dagli esperimenti di scattering è tanto più affidabile quanto meglio è conosciuto il processo partonico cui vanno accoppiate, e il regime di soglia è proprio quello in cui viene meno l'affidabilità della determinazione da Deep Inelastic Scattering; in particolare questo tipo di analisi è particolarmente utile per la funzione di densità meno precisamente determinata a grandi energie, ossia quella del gluone;

- lo studio del comportamento a piccoli momenti trasversi obbliga a confrontarsi con il momento trasverso intrinseco dei partoni nell'adrone, andando a sondare per quanto possibile la struttura non perturbativa di quest'ultimo;

- le reazioni adrone-adrone alla soglia sono quelle in cui si raggiunge attualmente la più alta energia a livello partonico: una migliore conoscenza può permettere di rilevare segnali di nuova fisica; ad esempio, dato che i quark pesanti decadono in numerosi leptoni, conoscere con esattezza la sezione d'urto con cui sono prodotti permette di sottrarre questo fondo leptonico, esponendo eventuali effetti più interessanti; un altro interessante esempio di questo tipo è costituito dai recenti risultati della collaborazione CDF (Fermilab) [37]: il discostamento, dalle previsioni di QCD al primo ordine, della distribuzione a grandissimi momenti trasversi dei getti prodotti in collisione protone-antiprotone sembrava indicare l'esporsi di un vertice puntuale tra quark, e quindi della presenza di una struttura non puntiforme dei quark; quello che è stato necessario per escludere un tale importante effetto è stato precisamente una più solida conoscenza delle correzioni di QCD di ordine superiore e delle correzioni alle pdf's.

1.3 Parte originale del lavoro di tesi

Dai molti esempi citati emerge in particolare una situazione cinematica che appare interessante: l'intersezione tra il regime di produzione alla soglia e quello di piccolo momento trasverso dei prodotti. Per esempio, la distribuzione di momento trasverso di una coppia di quark *top* al Tevatron è una grandezza esemplare che si colloca in questo doppio regime.

In questo lavoro di tesi ci occupiamo precisamente di questa sovrapposizione di regimi cinematici, cioè di ricavare una espressione per la distribuzione di momento trasverso trattando consistentemente le grosse correzioni che vengono da entrambi i limiti, al livello di Leading Logarithms.

Il calcolo è svolto nel caso esemplare del processo di Drell-Yan, proprio perchè le estensioni discusse sopra sono immediate.

1.4 Organizzazione del lavoro

Il resto di questo lavoro è organizzato come segue.

Nel Capitolo 2 approfondiamo gli aspetti essenziali del Modello a Partoni e della applicazione della QCD allo studio delle collisioni adroniche (in particolare nel processo di Drell-Yan) e mostriamo qualitativamente la nascita delle grosse correzioni logaritmiche ℓ nei regimi cinematici citati.

Nei tre capitoli seguenti (Capitoli 3, 4, 5) presentiamo gli studi e i risultati prodotti nel passato nei due regimi cinematici distinti, sempre relativamente al processo di Drell-Yan, ma presentiamo anche brevemente l'estensione all'importante processo di produzione di una coppia di quark pesanti, limitatamente al livello di approssimazione di Leading Logarithms (LLA).

Nel Capitolo 6 trova spazio il calcolo originale presentato sopra. Il nostro risultato finale è riassunto nel paragrafo 6.4.3 e si concretizza nella formula (6.84). Inoltre ci preoccupiamo di controllare che esso si riduca ai corrispondenti risultati della letteratura nel caso ci si limiti ad uno solo dei due regimi.

Nel Capitolo 7 presentiamo i risultati numerici per le distribuzioni di momento trasverso ottenute dall'applicazione della nostra formula, e mettiamo in luce l'importanza degli effetti inclusi nella nostra trattazione.

Capitolo 2

Formalismo perturbativo in fenomeni di produzione in collisioni adroniche

2.1 Il processo di Drell-Yan

Fissiamo l'attenzione sul processo di produzione elettromagnetica di una coppia di leptoni di grande massa invariante in una collisione adronica (processo di Drell-Yan, DY):

$$A + B \to \gamma^*(\to l^+ l^-) + X \tag{2.1}$$

Il processo è rappresentato pittoricamente nella fig.2.1: nella collisione tra i due adroni A e B, un quark contenuto nel primo adrone si annichila con un antiquark dello stesso sapore contenuto nell'altro adrone dando luogo ad un fotone virtuale γ^* di grande massa invariante che decade nella coppia di leptoni l^+l^-; il resto della materia adronica produce tutto quanto indicato con X.

Per fissare le idee, si può pensare alla collisione tra un protone p e un antiprotone $\overline{p}$, con la produzione di una coppia di $\mu^+\mu^-$.

La fig.2.1 non è altro che la rappresentazione schematica dell'idea base del cosiddetto Modello a Partoni: si interpretano gli adroni incidenti come costituiti da particelle (i partoni) debolmente legati tra loro (rispetto alla scala del processo di scattering) e si immagina che l'annichilazione vera e propria avvenga tra due partoni. Il processo di annichilazione dei due quark

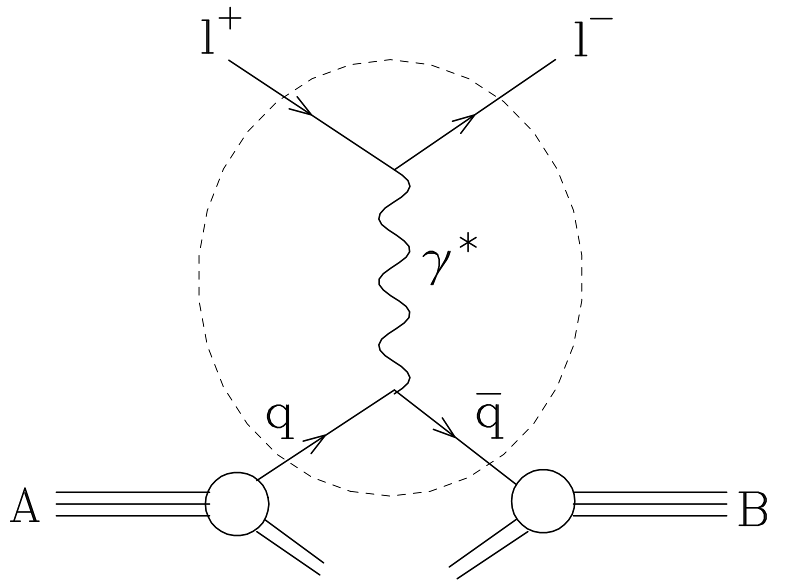


Figura 2.1: Processo di Drell-Yan. La linea tratteggiata racchiude il cosiddetto "processo partonico".

nella coppia leptonica è usualmente indicato come processo "partonico" (o "di corta distanza") ed è raffigurato all'interno di una linea tratteggiata in fig.2.1, mentre la sezione d'urto che ha come stato iniziale i due adroni "interi" è detta di livello "adronico".

2.2 Il Modello a Partoni e le correzioni radiative: il trattamento delle divergenze infrarosse e il Modello a Partoni "Improved"

Il Modello a Partoni è l'ampio schema teorico entro cui si ritiene di poter calcolare le grandezze relative a processi che hanno adroni come particelle di stato iniziale e che comportano lo scambio di un grande momento. Il più semplice esempio è quello del processo di Drell-Yan considerato qui, oppure il processo di produzione di una coppia di quark pesanti (esaminato più avanti), oppure ancora il Deep Inelastic Scattering (DIS), la produzione di getti adronici...

L'idea di base, come già accennato, è quella di considerare l'adrone H_j come un fascio di componenti (i partoni: quark di tutti i sapori e gluoni); ognuno di essi (ad esempio il partone i) porta una frazione $x_i \in (0,1)$ del quadrimomento dell'adrone individuata da una funzione di densità partonica $f_{i/H_j}(x)$. Si assume che la reazione avvenga tra due partoni, si considerano tutti i processi partonici utili e si risale al livello adronico tramite le funzioni di densità partonica.

Supponiamo, per fissare le idee, di voler calcolare la sezione d'urto totale del processo in (2.1), rappresentato in fig.2.1. La ricetta generale del modello a partoni, in prima approssimazione, è allora la seguente:

- si calcola la sezione d'urto del processo partonico: essa dipenderà dalle grandezze rilevanti a livello partonico (indicate d'ora in poi con il simbolo $\widehat{\cdot}$), ad esempio l'energia nel centro di massa dei due partoni incidenti ($\sqrt{\widehat{s}}$),
- si attua una convoluzione tra la grandezza partonica e le funzioni di densità dei partoni coinvolti, cioè si integra su tutte le possibili frazioni di momento e si somma su tutti i possibili partoni.

In formula:

$$\sigma_{H_1,H_2}(S,Q^2) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 f_{i/H_1}(x_1) f_{j/H_2}(x_2) \widehat{\sigma}_{i,j}(\widehat{s} = x_1 x_2 S, Q^2, \alpha_s) \tag{2.2}$$

dove Q^2 è la massa della coppia prodotta.

E' ben noto, però, che il calcolo della sezione d'urto partonica procede senza intoppi solo al livello di Born (che è rappresentato nella fig.2.1). Le prime correzioni da considerare sono quelle radiative, ossia l'emissione di gluoni o fotoni da parte dei partoni incidenti o delle particelle di stato finale: questo fenomeno è generalmente indicato con il nome di "radiazione di bremsstrahlung". Alcuni processi esemplari di questo tipo sono raffigurati in fig.2.2. Il processo a livello di Born è di ordine α_s^2: i grafici con emissione di un gluone reale dallo stato iniziale sono invece ovviamente di ordine α_s^3. Inoltre, altri contributi di ordine α_s^3 vengono dall'interferenza tra il processo di Born e le correzioni virtuali, come quelle raffigurate in fig.2.3.

Succede di fatto che il calcolo della sezione d'urto partonica con l'aggiunta delle correzioni radiative produce una divergenza, ed è istruttivo vedere qualitativamente quale ne sia la fonte. Il calcolo esplicito del grafico in fig.2.2a, ad esempio, fornisce un risultato infinito; più in dettaglio, si ottiene per la

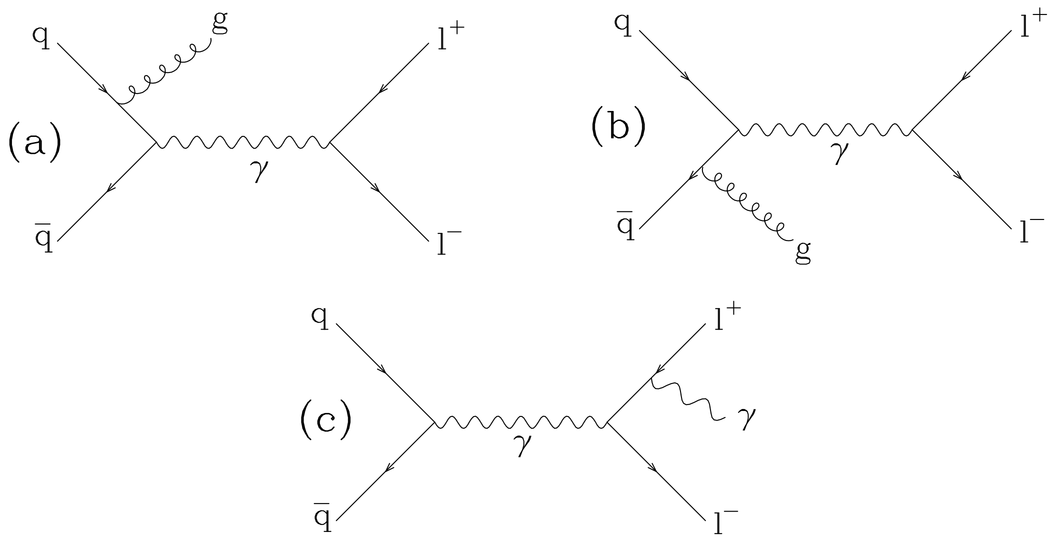


Figura 2.2: Correzioni radiative del primo ordine al processo partonico di Drell-Yan; g indica un gluone. (a) e (b): radiazione di un gluone reale dallo stato iniziale, (c): radiazione di un fotone reale dallo stato finale.

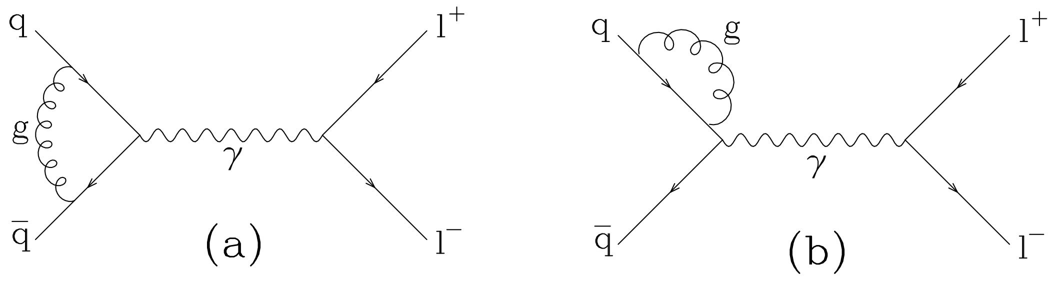


Figura 2.3: Correzioni virtuali al processo partonico di Drell-Yan. (a): correzione di vertice, (b): correzione di autoenergia.

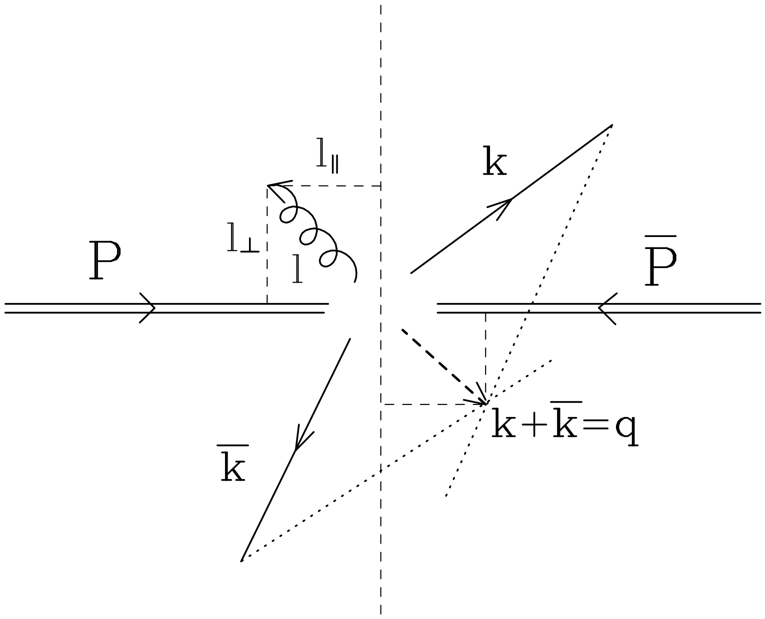


Figura 2.4: Illustrazione cinematica di una collisione tipo Drell-Yan, con emissione di un gluone. I due adroni collidono con momenti $\overrightarrow{P}$ e $\overrightarrow{\overline{P}}$; il leptone e l'antileptone prodotti hanno momenti $\overrightarrow{k}$ e $\overrightarrow{\overline{k}}$, la cui somma corrisponde al momento $\overrightarrow{q}$ del bosone intermedio; è indicata la scomposizione del momento del gluone in componente trasversa e longitudinale (rispetto all'asse di incidenza degli adroni); la componente trasversa del momento del gluone è uguale ed opposta a quella del bosone.

sezione d'urto partonica un fattore correttivo (alla sezione d'urto di Born) che ha qualitativamente la forma

$$\int C_F \frac{2\alpha_s}{\pi} \frac{1+\widehat{\tau}^2}{1-\widehat{\tau}} d\widehat{\tau} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2} \tag{2.3}$$

dove $z = \widehat{\tau} = Q^2/\widehat{s}$ (essendo Q^2 la massa del bosone prodotto e $\widehat{s}$ l'energia nel centro di massa del processo partonico), $l_\perp$ è la componente trasversa[1] (rispetto all'asse di incidenza degli adroni) del gluone emesso; $C_F = 4/3$ è il fattore di colore caratteristico della QCD. Una illustrazione delle grandezze cinematiche introdotte è proposta in fig.2.4. Il fattore $\frac{1+\widehat{\tau}^2}{1-\widehat{\tau}} d\widehat{\tau} dl_\perp^2$ è di fatto un rimaneggiamento dell'elemento di spazio delle fasi del partone emesso; il fattore $\frac{\alpha_s}{l_\perp^2}$ è invece l'ampiezza di scattering di emissione.

[1] *Convenzioni sulle notazioni dei vettori.* Dato un vettore $\overrightarrow{a}$, adottiamo la convenzione di indicare il suo modulo $|\overrightarrow{a}|$ semplicemente con la lettera minuscola a. In particolare, quindi, $\frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2}$ è una notazione semplificata per $\frac{d|\overrightarrow{l_\perp}|^2}{|\overrightarrow{l_\perp}|^2}$.

E' evidente che l'integrazione in (2.3) dà risultato divergente, e questo a causa di due regioni di singolarità dell'integranda: la regione $l_\perp^2 \to 0$ corrisponde all'emissione di un gluone il cui momento è parallelo a quello del quark che lo emette (divergenza collineare); la regione $\widehat{\tau} \to 1$ corrisponde all'emissione di un gluone con pochissima energia (divergenza soffice).

Il calcolo esplicito di un grafico come quello in fig.2.2b avrebbe dato lo stesso tipo di esito.

Essendo relative alla regione di piccolo momento del gluone irradiato, questo divergenze sono collettivamente denominate *divergenze infrarosse*.

Per completare il calcolo del contributo di ordine α_s^3, però, si devono ancora aggiungere le correzioni virtuali, come quelle rappresentate in fig.2.3: svolgendo il calcolo anche per queste ultime si trova che anch'esse producono divergenze.

Quale è l'esito della somma di tutti questi contributi divergenti?

Si verifica direttamente che le divergenze dovute alle correzioni reali e virtuali dello stato finale si cancellano tra loro, quelle dovute alle emissioni soffici dallo stato iniziale si cancellano anch'esse col contributo virtuale, mentre le divergenze dovute all'emissione collineare dallo stato iniziale "sopravvivono". All'ordine che stiamo considerando ($\mathcal{O}\left(\alpha_s^3\right)$) la verifica delle cancellazioni è un procedimento direttamente attuabile, ma risulta che anche a tutti gli ordini superiori lo stesso tipo di cancellazioni si riproducono.

Queste divergenze collineari sopravvissute segnalano l'inevitabile sensibilità della teoria alla regione di basse energie, e devono essere regolarizzate (imponendo per esempio un cutoff infrarosso λ all'integrazione sui momenti dei gluoni radiati): possono però poi essere riassorbite nelle funzioni di struttura, secondo quello che prende il nome di teorema di fattorizzazione. Si introduce per esempio un taglio μ (arbitraria scala energetica) e si incorpora la porzione divergente ($< \mu$) nelle funzioni di struttura, ridefinendole. In questo modo si inserisce una dipendenza dall'arbitraria scala μ sia nelle funzioni di struttura che nell'espressione della sezione d'urto partonica.

Il risultato è allora che il modello ha partoni sopravvive alle divergenze collineari dello stato iniziale al prezzo di passare ad una nuova espressione di convoluzione tra processo partonico e funzioni di struttura: la cosiddetta "Improved Parton Model formula":

$$\sigma_{H_1,H_2}(S,Q^2) = \sum_{ij} \int dx_1 dx_2 f_{i/H_1}(x_1,\mu) f_{j/H_2}(x_2,\mu) \\ \widehat{\sigma}_{i,j}(\widehat{s} = x_1 x_2 S, Q^2, \alpha_s(\mu), \mu) \quad (2.4)$$

In questa formula si è inserita quindi la scala di fattorizzazione μ nella sezione d'urto partonica e nelle funzioni di struttura, ma il membro sinistro (la quantità fisica) ne è indipendente.

La sezione d'urto partonica $\widehat{\sigma}$ è calcolabile come serie perturbativa, ossia

$$\widehat{\sigma}_{i,j}(\widehat{s} = x_1 x_2 S, Q^2, \alpha_s(\mu), \mu) = \sum_l \alpha_s^l(\mu^2) \cdot \widehat{\sigma}_{i,j}^{(l)}(\widehat{s} = x_1 x_2 S, Q^2, \alpha_s(\mu), \mu) \tag{2.5}$$

La scelta della scala μ è arbitraria ma relativamente vincolata dal fatto di essere dell'ordine dell'energia in gioco nel processo forte, per evitare la comparsa di grosse correzioni nei termini della serie perturbativa.

La ridefinizione delle funzioni di struttura è universale (indipendente dal processo partonico); la loro dipendenza dalla variabile μ è determinata dalle equazioni di evoluzione di Altarelli-Parisi:

$$\frac{\partial}{\partial \ln \mu^2} f_{i/H}(x, \mu) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \sum_j P_{ij}(\alpha_s(\mu^2), z) f_{j/H}(x/z, \mu) \tag{2.6}$$

Queste equazioni permettono, data l'espressione delle funzioni di struttura ad un certo valore di μ, di calcolarle ad ogni altro valore. Le funzioni P_{ij} sono dette "di splitting" e sono esprimibili come serie di potenze nella costante di accoppiamento $\alpha_s(\mu^2)$:

$$P_{ij}(\alpha_s(\mu^2), z) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi} P_{ij}^{(0)}(z) + \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\right)^2 P_{ij}^{(1)}(z) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \tag{2.7}$$

Le funzioni di struttura, per un certo valore di μ, sono da determinarsi sperimentalmente da un processo ben conosciuto (tipicamente il DIS).

2.3 Correzioni logaritmiche dominanti

Nel paragrafo precedente abbiamo osservato come le divergenze infrarosse insorgano dall'integrazione sulle regioni di singolarità dell'integranda nella (2.3). Si sono anche osservate le mutue cancellazioni e le ridefinizioni necessarie a mondare, con successo, il risultato fisico dagli infiniti.

Se è vero quindi che le correzioni radiative non rovinano irrimediabilmente il calcolo della sezione d'urto partonica, è però vero che esse apportano grosse correzioni di tipo logaritmico quando ci si trova ai margini dello spazio delle fasi. Toccare con mano la nascita di queste correzioni, e il loro significato, sarà l'argomento di questo paragrafo.

Insistiamo con l'esempio particolarmente semplice della emissione di un singolo gluone, con più attenzione per i limiti di integrazione imposti dalla cinematica del processo: consideriamo la correzione alla sezione d'urto di Born (2.3):

$$C_F \frac{2\alpha_s}{\pi} \int \frac{1+\widehat{\tau}^2}{1-\widehat{\tau}} d\widehat{\tau} \int_0^{Q^2 \frac{(1-\widehat{\tau})^2}{4\widehat{\tau}}} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2} \tag{2.8}$$

Il limite superiore della variabile $l_\perp^2$ è prodotto semplicemente dall'osservazione che deve valere $l_\perp^2 \leqslant l_0^2 = Q^2 \frac{(1-\widehat{\tau})^2}{4\widehat{\tau}}$ (grazie alla conservazione dell'energia che impone la relazione $l_0 = \frac{s-Q^2}{2\sqrt{s}}$).

L'integrazione in $l_\perp^2$ valutata nel limite inferiore produce la divergenza collineare, analizzata (e "neutralizzata") in dettaglio nel paragrafo precedente. Invece risolvere e valutare l'integrale in $l_\perp^2$ nel limite superiore genera un termine logaritmico del tipo

$$\frac{1}{1-\widehat{\tau}} \ln (1-\widehat{\tau}) \tag{2.9}$$

che rappresenta un fattore moltiplicativo correttivo per la sezione d'urto. Questo termine è particolarmente grande nel caso di $\widehat{\tau} \sim 1$, ossia nel caso che l'energia a disposizione del gluone emesso sia poca.

Intendendo prima svolgere l'integrazione sulla variabile $\widehat{\tau}$, la (2.8) si può esprimere come

$$C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \int \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2} \int^{1-\frac{l_\perp}{Q}} \frac{d\widehat{\tau}}{1-\widehat{\tau}} \tag{2.10}$$

Lo stesso limite cinematico considerato in precedenza produce in questo caso l'estremo superiore di integrazione, il quale origina un termine logaritmico che qui risulta

$$\frac{1}{l_\perp^2} \ln \frac{l_\perp^2}{Q^2}, \tag{2.11}$$

tanto più rilevante quanto più $l_\perp^2 \ll Q^2$, ossia quanto più il range di momenti trasversi concessi al gluone emesso è ristretto.

Queste valutazioni qualitative mostrano quindi la cosa seguente: la radiazione di gluoni da parte dei quark di stato iniziale apporta correzioni di tipo logaritmico che diventano molto importanti nell'avvicinarsi ai confini dello spazio delle fasi del gluone emesso. Si potrebbe dire che l'emissione reale è inibita (ha un tetto superiore cinematico) e non è in grado di compensare gli effetti (divergenti) delle correzioni virtuali in modo completo; la cancellazione reale-virtuale è incompleta e il residuo sono i grandi logaritmi ("di Sudakov") evidenziati, tanto più importanti quanto più la radiazione reale è inibita.

Secondo un punto di vista simile e complementare, queste grosse correzioni sono da considerare l'effetto della presenza di due scale energetiche molto diverse nel processo: la grande massa invariante Q^2 della coppia prodotta (o del bosone vettore) e il piccolo momento $l_\perp^2$ del gluone irradiato nel caso della (2.11); la grande energia $\widehat{s}$ ($\simeq Q^2$) del processo partonico e il piccolo valore della differenza $\widehat{s} - Q^2$ nel caso della (2.9). Più il rapporto tra queste grandezze è sbilanciato e più la teoria mostra di "soffrirne".

Di conseguenza, se si vuole analizzare una grandezza fisica che comporti il sondare la regione ai limiti dello spazio delle fasi dei gluoni emessi per bremsstrahlung, bisogna fare i conti con le grosse correzioni logaritmiche che ogni radiazione apporta.

Due esempi di grandezze di questo tipo sono la distribuzione di momento trasverso della coppia prodotta, nella regione di piccolo momento, e la sezione d'urto totale nella regione di soglia. Esse verranno analizzate in dettaglio nei prossimi capitoli.

Capitolo 3

La distribuzione di momento trasverso della coppia prodotta

Continuiamo a focalizzare l'attenzione sul processo di Drell-Yan (fig.2.1), e consideriamo il momento trasverso $q_\perp$ della coppia leptonica, ossia la somma vettoriale dei momenti trasversi (rispetto all'asse di incidenza degli adroni) dei due leptoni prodotti.[1]

E' evidente che, per conservazione del momento nei due vertici del processo partonico, la quantità $q_\perp$ equivale al momento trasverso totale dei due quark che subiscono l'annichilazione. Se ci si limita a considerare il processo a livello Born, si tratta quindi del momento trasverso medio posseduto dai costituenti "all'interno" dell'adrone, ossia di una quantità "piccola", dell'ordine della massa dell'adrone padre ($\sim 1GeV$). Se si introduce la possibilità che i quark incidenti emettano per radiazione (di bremsstrahlung) uno o più partoni (gluoni, nel caso più semplice, fig.3.1), essi acquistano un'ulteriore componente trasversa di rinculo che viene conservata durante l'annichilazione e si traduce nella componente trasversa $q_\perp$ della coppia di leptoni. I partoni radiati si materializzano come getti adronici.

La sezione d'urto differenziale rispetto al momento trasverso $q_\perp$ della coppia leptonica, ovvero del bosone vettore che la produce, è una quantità da tempo al centro di un grande interesse. Più precisamente, si è considerata storicamente la grandezza (cfr. Appendice C)

$$\frac{d\sigma}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} \tag{3.1}$$

[1] Si può continuare a riferirsi alla fig.2.4 per le notazioni cinematiche.

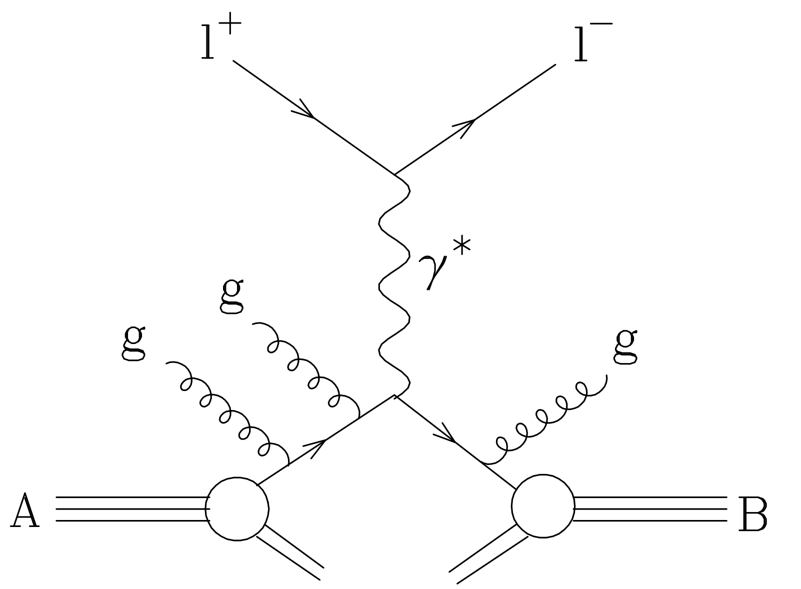


Figura 3.1: Processo di Drell-Yan con radiazioni di gluoni dalle particelle di stato iniziale.

dove Q^2 è la massa del bosone vettore virtuale e y è la rapidità[2] della coppia leptonica.

E' importante distinguere la regione di grande momento trasverso ($q_\perp \sim Q$) dalla regione in cui quest'ultimo è piccolo ($q_\perp \ll Q$).

3.1 Regione di grande momento trasverso

Nella regione di $q_\perp \sim Q$ la teoria perturbativa può essere applicata nel modo standard. Molti autori hanno considerato i grafici di Feynman significativi al primo e al secondo ordine perturbativo e portato l'accuratezza del calcolo fino all'ordine α_s^2 (cfr. ref.[4] $\rightarrow$ [9]). La fig.3.2 mostra, a puro titolo illustrativo, l'andamento della grandezza (3.1), calcolata come detto poc'anzi, e i punti sperimentali relativi. L'aspetto immediatamente evidente è che il grosso degli eventi si colloca non nella regione in esame, ma al contrario in quella di piccolo $q_\perp$: a partire quindi dalla fine degli anni '70, un intenso lavoro di ricerca si è interessato di questo altro regime.

[2]Per la definizione di rapidità, cfr. App.C

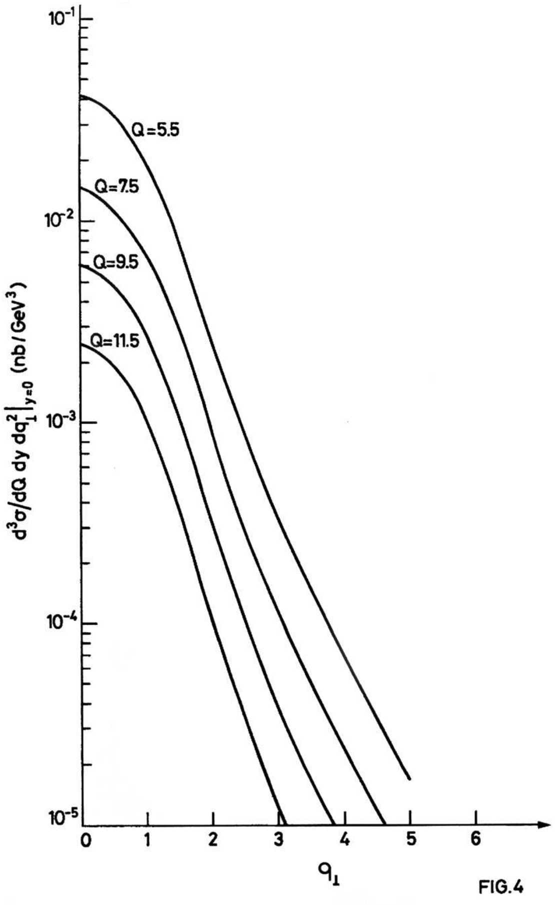


Figura 3.2: Andamento indicativo della distribuzione di momento trasverso in equ.3.1 (a meno di un fattore Q), nella condizione di grande momento trasverso ($q_\perp \sim Q$) (da ref.[5]).

3.2 Regione di piccolo momento trasverso

Consideriamo allora la regione di $q_\perp \ll Q$. Come si è mostrato qualitativamente in §2.3, ogni gluone radiato apporta una correzione logaritmica; questo fa sì che ordine per ordine in teoria perturbativa i coefficienti della serie in α_s contengano fattori come[3]

$$\ell_{2n-1} = \frac{1}{q_\perp^2} \ln^{2n-1} \frac{q_\perp^2}{Q^2} \tag{3.2}$$

[3]Nella situazione che stiamo considerando, l'esponente $2n - 1$ è il maggiore col quale possono comparire queste correzioni logaritmiche ad accompagnare α_s^n.

che, nella regione che stiamo considerando, assumono grande rilevanza. Questo è una conseguenza esemplare del fatto che il limitarsi alla regione di piccolo momento trasverso significa esplorare i confini dello spazio delle fasi dei gluoni emessi.

L'espansione perturbativa in α_s troncata ad un certo ordine (per esempio al secondo ordine, come è stata applicata nella regione presa in esame precedentemente), dunque, appare non più adeguata, poichè, ad esempio, un termine di ordine $\alpha_s^3 \ell_5$ può in valore assoluto essere più significativo di un termine di ordine α_s^2. Diventa necessario riconsiderare il peso relativo dei vari termini della serie perturbativa ed essere in grado di risommare quelli più rilevanti.

3.2.1 Approssimazione ai "Leading Logarithms" e formula "DDT"

Dokshitzer, Dyakonov e Troyan ([1] [2] [3]) per primi ottennero un risultato significativo nella direzione della risommazione. Lo schema di approssimazione del loro lavoro è quello della Leading Logarithm Approximation (LLA), che consiste in quanto segue.

In primo luogo ci si limita a considerare come regione di variabilità per $q_\perp^2$

$$\Lambda_{QCD}^2 \ll q_\perp^2 \ll Q^2 \tag{3.3}$$

In particolare, quindi, si rimane al di fuori della regione in cui $q_\perp^2$ è confrontabile con grandezze dell'ordine della regione non perturbativa.

In seguito, tra tutti i grafici di Feynman relativi al processo considerato vengono selezionati quelli nei quali la piccolezza della costante α_s venga compensata da un grosso fattore logaritmico del tipo di quello in (3.2). I logaritmi con la più alta potenza prendono la forma

$$\left(\alpha_s \ln^2 \frac{q_\perp^2}{Q^2}\right)^m \tag{3.4}$$

Tra tutti i possibili grafici di Feynman a tutti gli ordini perturbativi, quali sono quelli che rispondono al requisito di produrre un termine di grossa correzione logaritmica e quindi vengono selezionati in LLA? Viene dimostrato da Dokshitzer, Dyakonov e Troyan che, quantomeno operando una opportuna scelta di gauge, gli unici da considerare sono proprio quelli che si costruiscono a partire dal processo di livello Born aggiungendo un numero arbitrario di radiazioni (soffici) da parte dei quark incidenti[4] (il processo raffigurato in fig.3.1); sono detti "Ladder Diagrams" poichè il loro modulo quadrato assume il caratteristico aspetto di una scala a pioli (fig.3.3). Vengono quindi esclusi dalla risommazione in LLA non solo tutti i grafici di struttura diversa da quella a scala, ma anche le possibili interferenze (ad esempio fig.3.4). Ovviamente vanno applicate le correzioni virtuali ai propagatori e ai vertici di ogni diagramma, e il risultato viene chiamato "Dressed-Ladder-Diagram".

Il risultato di Dokshitzer, Dyakonov e Troyan sulla selezione dei diagrammi significativi è estrememente rilevante: di fatto stabilisce che le grosse correzioni all'esame della risommazione sono da imputare essenzialmente solo alla radiazione di gluoni soffici dallo stato iniziale[5].[6]

Abbiamo quindi qualitativamente mostrato quali termini siano i più rilevanti per l'assunzione di LLA. Tuttavia una definizione rigorosa di questo schema è possibile solo a posteriori della risommazione, come discutiamo più avanti.

Inoltre segnaliamo che per poter realizzare la risommazione[7] dei logaritmi del momento trasverso è necessario (cfr.[3]) assumere che i momenti trasversi $\overrightarrow{l_{i\perp}}$ di tutti i gluoni soffici emessi, eccetto uno, siano molto più piccoli del momento trasverso totale della coppia $\overrightarrow{q_\perp}(\equiv -\sum_i \overrightarrow{l_{i\perp}})$:

$$\overrightarrow{l_{\tilde{\imath}\perp}} \approx \overrightarrow{q_\perp} \qquad \text{e} \qquad \left|\overrightarrow{l_{i\perp}}\right| \ll \left|\overrightarrow{q_\perp}\right| \quad \forall i \neq \tilde{\imath} \tag{3.5}$$

In particolare, a maggior ragione, si sta assumendo che valga la forte relazione

$$\left|\overrightarrow{l_{i\perp}}\right| \leq \left|\overrightarrow{q_\perp}\right| \quad \forall i \tag{3.6}$$

e questo, come si vedrà, può essere una richiesta eccessiva, che ha effetti non irrilevanti ai fini del risultato ottenuto.

DDT formula

Il risultato dell'approccio e delle assunzioni appena descritti è la cosiddetta "DDT formula":

[4]Del resto anche in [7] (che si occupa del calcolo ad ordine α_s^2 nella regione $q_\perp \sim Q$) si mostra esplicitamente come, nell'estrapolazione al limite $|q_\perp| \to 0$, gli unici grafici di ordine α_s^2 che diano origine a grossi contributi siano quelli del tipo indicato in fig.3.1.

[5]A volte indicata con l'acronimo ISGB: "Initial State Gluon Bremsstrahlung".

[6]Nei capitoli precedenti questo è già stato implicitamente assunto; infatti finora abbiamo considerato qualitativamente grafici di questo tipo.

[7]Essenzialmente: per poter ottenere la fattorizzazione degli spazi delle fasi, come discutiamo più avanti.

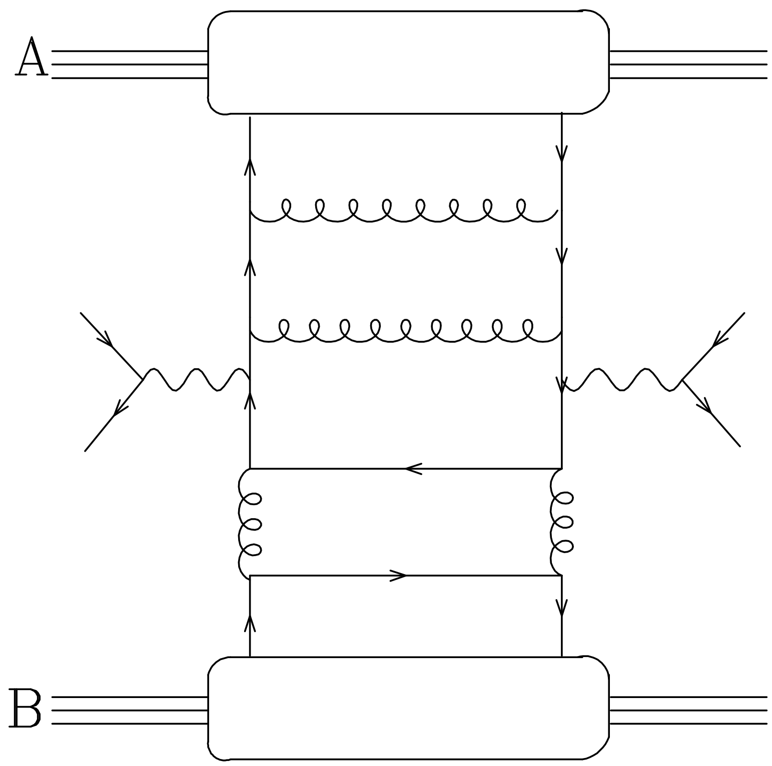


Figura 3.3: "Ladder Diagram"

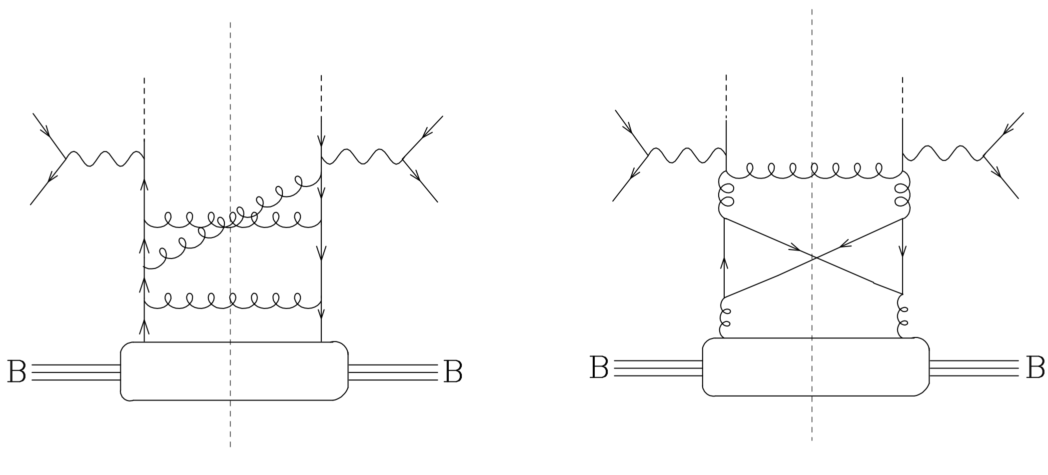


Figura 3.4: "Non Ladder Diagrams"

$$\frac{d\sigma(AB \to l^+l^- + X)}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = \sigma_0(S) \frac{1}{Q^2 q_\perp^2} \frac{\partial}{\partial \ln q_\perp^2}$$
$$\sum_f q_f^2 \left(D_{f/A}(x_1, q_\perp^2) D_{\overline{f}/B}(x_2, q_\perp^2) \mathbb{S}(q_\perp^2, Q^2) + (f \longleftrightarrow \overline{f}) \right) \quad (3.7)$$

In questa formula[8] $\sigma_0(S) = \frac{1}{3}\frac{4}{3}\pi\alpha_{em}^2\frac{1}{S}$ è la sezione d'urto totale di Born ($\frac{1}{3}$ è il fattore di molteplicità di colore, $\sqrt{S}$ è l'energia nel centro di massa a livello adronico, le particelle incidenti sono intese di carica e, la carica dell'elettrone); l'indice f corre sui sapori dei quark; q_f è la frazione di carica elettrica del quark f, rispetto ad e; $D_{f/A}(x_1, q_\perp^2)$ rappresenta la probabilità di trovare un quark (o antiquark) f entro l'adrone A, con una frazione x_1 del momento totale dell'adrone stesso (e analogamente $D_{\overline{f}/B}(x_2, q_\perp^2)$); si noti che la scala energetica a cui vanno valutate le D è posta a $q_\perp^2$.

Nel fattore $\mathbb{S}(q_\perp^2, Q^2)$ (il "fattore di Sudakov") sono incorporati tutta la complicatezza e gli effetti della risommazione delle emissioni di gluoni soffici. L'espressione esplicita di questo fattore, calcolata in LLA, risulta essere:

$$\mathbb{S}(q_\perp^2, Q^2) = \exp\left[-C_F \frac{\alpha_s}{2\pi} \ln^2 \frac{Q^2}{q_\perp^2}\right] \quad (3.8)$$

La definizione corretta di cosa significhi limitarsi ai Leading Logarithms (LLA) è ora possibile, a livello dell'esponente di questo fattore (come discusso in [16]); LLA significa considerare nell'esponente del fattore di Sudakov solo i termini della forma

$$\alpha_s^n \ell^{n+1} \qquad \text{essendo} \quad \ell = \ln \frac{Q^2}{q_\perp^2} \quad (3.9)$$

E' chiaro che, sviluppando l'esponenziale in potenze di α_s e di ℓ, i termini con la più alta potenza logaritmica che si producono sono quelli citati in (3.4)

[8]Nella scrittura di questa formula l'ultimo fattore è stato denotato con $\mathbb{S}$ invece che con $\mathbb{T}^2$: abbiamo infatti operato due modifiche (relative esclusivamente alle notazioni) rispetto ai lavori originali di Dokshitzer, Dyakonov e Troyan, che però è il caso di sottolineare brevemente per non ingenerare confusione nel confronto con la letteratura. Scrivere $\mathbb{S}$ al posto di $\mathbb{T}$ è suggerito dal nome di fattore "di Sudakov", invalso nell'uso per riferirsi a questo termine anche se Dokshitzer, Dyakonov e Troyan lo riservano ad un'altra quantità (maggiori dettagli sulle notazioni dei fattori esponenziali nella nota che segue); questo rovina la successione "D-D-T" dei nomi delle quantità che compaiono nella formula, che, nelle intenzioni degli autori, la battezza; possiamo in alternativa pensare che il nome venga dalle iniziali degli autori stessi.

(dal termine con $n = 1$); sarebbe però più restrittivo (e infondato) definire lo schema LLA trattenendo solo questi ultimi tra tutti i termini dello sviluppo. Rimandiamo comunque a [16] per una discussione più approfondita.

Analizziamo l'andamento qualitativo della sezione d'urto differenziale previsto dalla DDT formula: in prima approssimazione l'andamento è come $1/q_\perp^2$, a meno di correzioni nel logaritmo di $q_\perp^2$. Il fattore $\mathbb{S}(q_\perp^2, Q^2)$ si comporta come un fattore soppressivo: per $q_\perp \ll Q$ ha l'effetto di correggere appiattendolo l'andamento di tipo potenza. Si ricordi, comunque, che la regione di $q_\perp \simeq 0$ rimane inaccessibile, visti i limiti di validità della trattazione che si è portata avanti (cfr. equ.(3.3)).

3.2.2 Rapporti tra il fattore di Sudakov $\mathbb{S}$ e il fattore di forma dovuto alle correzioni virtuali

Per capire più a fondo il ruolo giocato dal fattore $\mathbb{S}$ in questo processo è utile istituire un collegamento con il concetto di fattore di forma dovuto alle correzioni virtuali (di vertice) Γ.[9] In sostanza, si tratta degli stessi concetti espressi in 2.3 per il caso esemplificativo di un solo gluone emesso, "elevati" alla situazione presente, ovvero al caso dell'emissione risommata di un numero arbitrario di gluoni.

Il seguente ragionamento permette una costruzione euristica del fattore di forma Γ dovuto alle correzioni virtuali, senza la pretesa della giustificazione rigorosa dei vari passaggi (cfr.[39]).

Consideriamo, a livello di semplice QED, il processo di annichilazione e^+e^- e supponiamo di volerne calcolare la sezione d'urto totale. E' importante sottolineare che stiamo quindi cercando una quantità integrata, e non una quantità differenziale come la distribuzione di momento trasverso su cui stiamo lavorando in questo capitolo.

La sezione d'urto Born è facilmente calcolabile, ma è necessario poi considerare le correzioni virtuali di vertice (lo scambio di fotoni virtuali tra i due

[9] *Notazioni e convenzioni riguardo ai vari fattori esponenziali.* Nella nostra trattazione e nei diretti riferimenti bibliografici sono in gioco tre fattori esponenziali formalmente simili ma concettualmente diversi: $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$, Γ. Γ è il fattore di forma dovuto alle correzioni virtuali (di vertice) trattato in questo paragrafo: è stato introdotto e calcolato da Sudakov negli anni '50 ma non viene indicato col nome del suo autore. $\mathbb{T}$ è il fattore di forma che compare nella formula originale di Dokshitzer, Dyakonov e Troyan: la differenza con $\mathbb{S}$ è esclusivamente formale ed è descritta nella nota precedente. $\mathbb{S}$ è il fattore esponenziale più noto, la cui analisi è il fulcro di molti lavori; esso prende il nome di "fattore di Sudakov".

leptoni incidenti, l'analogo per la QED del grafico in fig.2.3a) e di self-energy (l'analogo della fig.2.3b); al primo ordine la correzione virtuale dà origine ad un fattore moltiplicativo per l'ampiezza di scattering del tipo

$$1 - \frac{\alpha_{em}}{4\pi} \ln^2 \frac{Q^2}{\lambda^2} \tag{3.10}$$

dove λ è il cutoff infrarosso. Considerando tutti gli ordini, il contributo di tutta la serie di termini di questo tipo è risommabile (fu dimostrato già da Sudakov nel 1956) e si coagula in un fattore di tipo esponenziale doppio logaritmico (fattore di forma dovuto alle correzioni virtuali) che moltiplica l'ampiezza:

$$\Gamma(\lambda^2, Q^2) = \exp\left[-\frac{\alpha_{em}}{4\pi} \ln^2 \frac{Q^2}{\lambda^2}\right] \qquad \text{(QED)} \tag{3.11}$$

Il passaggio all'analogo processo di QCD (annichilazione di $q\overline{q}$) ammonta di fatto soltanto ad alcuni adattamenti formali (sostituire la costante α con α_s e introdurre un fattore di molteplicità C_F dovuto agli N colori ($C_F = 4/3$ se $N = 3$)), ma si tratta in realtà di una estensione non banale, perchè nel processo di QCD fanno la loro comparsa i vertici gluone-gluone (quindi i grafici di Feynman delle correzioni (virtuali) non sono più "semplici" quanto quelli di QED). In ogni caso l'estensione risulta applicabile e il fattore Γ diventa:

$$\Gamma(\lambda^2, Q^2) = \exp\left[-C_F \frac{\alpha_s}{4\pi} \ln^2 \frac{Q^2}{\lambda^2}\right] \qquad \text{(QCD)} \tag{3.12}$$

Fino ad ora abbiamo però implicitamente assunto che la costante di accoppiamento α_s di QCD sia fissa come quella di QED. L'inserimento della dipendenza della costante α_s dall'energia ("running coupling") porta ad una ulteriore versione, più completa, del fattore Γ per la QCD:

$$\Gamma(\lambda^2, Q^2) = \exp\left[-C_F \int_{\lambda^2}^{Q^2} \frac{dk^2}{k^2} \frac{\alpha_s(k^2)}{4\pi} \ln \frac{Q^2}{k^2}\right] \qquad \text{(QCD)} \tag{3.13}$$

Nella sezione d'urto del processo comparirà il quadrato di un fattore come il precedente: $\Gamma^2(\lambda^2, Q^2)$.

Quale è il contenuto fisico del fattore Γ^2? E' nato calcolando la sezione d'urto dell'annichilazione con tutte le correzioni virtuali del caso, ma senza includere la radiazione reale di fotoni (nel caso della QED) o gluoni (nel caso della QCD) da parte delle particelle incidenti, dunque si può interpretare come la probabilità che il processo di annichilazione avvenga senza emissione di fotoni/gluoni reali.

Prevedibilmente, mandando il cutoff infrarosso a zero (come deve essere) si espongono totalmente le divergenze virtuali (cfr.2.2) e quindi $\Gamma^2(\lambda^2, Q^2) \to 0$ in modo più forte di ogni potenza, e questo "schiaccia a zero" l'intera espressione per la sezione d'urto totale, ossia la teoria prevede che il processo senza radiazione di bremsstrahlung "non può avvenire".

In ogni processo fisico reale la radiazione di bremsstrahlung è peraltro necessariamente presente, ed infatti succede che aggiungendo le correzioni relative alle emissioni reali (in particolare quelle soffici) si realizza la cancellazione del fattore Γ^2.

Per riassumere, il ragionamento precedente mostra quanto segue: sotto le condizioni che (a) si voglia calcolare una grandezza totalmente inclusiva come la sezione d'urto totale e (b) si includano gli inevitabili effetti di bremsstrahlung, allora si ottiene che il fattore soppressivo Γ, originato sostanzialmente dalle correzioni virtuali al processo di Born, viene totalmente cancellato.

Forti dell'intuizione sviluppata nell'interpretazione del fattore Γ, torniamo al processo della DDT formula: la differenza principale rispetto all'esempio che porta alla nascita e alla cancellazione del fattore Γ^2 è che in questo caso la quantità che viene calcolata non è una sezione d'urto totale ma differenziale e questo determina la permanenza di un fattore soppressivo di tipo doppio logaritmico: il fattore di Sudakov $\mathbb{S}$.

Il fatto è che la radiazione reale ha limiti di integrazione differenti da quelli del termine virtuale. Si potrebbe dire che, a causa del fatto che la quantità in esame (ossia il "membro sinistro" della DDT formula) non è totalmente inclusiva, la cancellazione del termine Γ^2 non è completa, nonostante il fatto che la radiazione soffice sia in questo caso inclusa nel calcolo; ovvero l'aggiunta della radiazione soffice reale comporta il compensamento "soltanto di una parte" della soppressione dovuta al fattore Γ^2: ciò che avanza è il fattore $\mathbb{S}$ di Sudakov.

Ad un certo fissato Q, per grandi $q_\perp$ il fattore $\mathbb{S}$ non esercita soppressione della sezione d'urto differenziale, mentre per $q_\perp$ piccoli la sezione d'urto differenziale viene schiacciata.

E' ora evidente come la presenza del fattore $\mathbb{S}$ non sia altro che la trasposizione nel presente contesto (risommazione di un numero arbitrario di emissioni reali soffici) dei ragionamenti fatti nel caso della emissione di un solo gluone: è il "tetto" cinematico imposto alla radiazione di bremsstrahlung dall'essere ai margini dello spazio delle fasi che si concretizza nel fattore soppressivo.

3.2.3 Risommazione nello spazio del parametro di impatto

Limiti della DDT formula

Quale è il potere predittivo della DDT formula? Gli autori stessi realizzarono un primo confronto con i dati sperimentali ([3]) i cui risultati sono riportati in fig.3.5: se è vero che l'andamento generale della grandezza $\frac{d\sigma(AB \to l^+l^- + X)}{dq_\perp^2 dQ^2 dy}$ è ben riprodotto dalla curva teorica per $q_\perp$ "intermedi", è anche vero che la regione di $q_\perp \sim Q$ registra un distacco della curva teorica dai punti sperimentali, come ci si attende dal fatto che in questa regione è più proprio applicare la teoria perturbativa standard (senza risommazione). Inoltre, è importante ribadire che la formula DDT, a causa proprio dell'applicazione

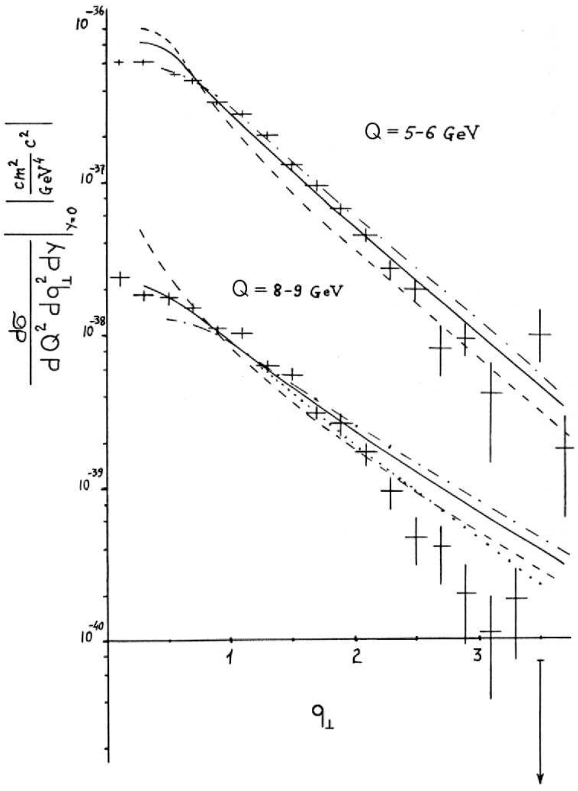


Figura 3.5: Previsioni della DDT formula (si tratta della fig.31 di ref.[3]), per due diversi valori di Q confrontate con i punti sperimentali disponibili all'epoca. Le linee di diversa foggia si riferiscono a diverse scelte per Λ_{QCD}, tra 100 e 500 MeV.

dello schema di LLA sui logaritmi di $q_\perp$, limita la sua validità alla regione indicata in (3.3): in particolare la zona di $q_\perp \to 0$ non è accessibile. Volendo però ugualmente forzare la curva teorica, si ottiene che

$$\left.\frac{d\sigma(AB \to l^+l^- + X)}{dq_\perp^2 dQ^2 dy}\right]_{q_\perp^2=0} = 0 \tag{3.14}$$

ossia il fattore $\mathbb{S}$ è responsabile della totale soppressione della sezione d'urto differenziale. Questo risultato è in disaccordo con i dati sperimentali e appare fisicamente poco plausibile.

Il punto debole dell'approccio di DDT è l'assunzione in (3.6), peraltro necessaria per risommare i logaritmi del momento trasverso: si impone che ogni gluone emesso non abbia momento trasverso superiore a quello della coppia prodotta. Questa è la causa della errata predizione dell'andamento in $q_\perp = 0$. In sostanza, si entra nella regione perturbativamente non controllabile di $l_\perp \sim \Lambda_{QCD}$, e quindi la teoria perde di validità.

Quello che invece realmente succede nel processo di produzione di una coppia a bassissimo momento trasverso è che vengano emessi due o più gluoni i cui momenti trasversi non sono per forza piccolissimi ma si compensano vettorialmente a zero. In questo modo gli effetti dell'impredicibile distribuzione di momento trasverso intrinseco dei partoni nell'adrone (dell'ordine di Λ_{QCD}) sono soverchiati e non è più necessario tenerne conto.

Risommazione nello spazio del parametro di impatto

Parisi e Petronzio ([10]) per primi hanno sviluppato il formalismo che automaticamente tiene conto di questo aspetto del fenomeno. Si tratta di rilasciare l'ipotesi di LLA sui logaritmi di $l_\perp$ e di passare allo spazio del parametro di impatto $\overrightarrow{b}$, variabile coniugata secondo Fourier del momento trasverso. La risommazione avviene in questo spazio (cioè sui logaritmi di b) recuperando l'ipotesi di LLA, ma applicata ai logaritmi della variabile b. Solo all'ultimo si provvede a ritrasformare la quantità allo spazio del momento trasverso $q_\perp$.

Si esprime come trasformata di Fourier il vincolo cinematico sui momenti trasversi:

$$\begin{aligned}\delta\left(\overrightarrow{q_\perp} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{l_{i\perp}}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b \exp\left[-i\,\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{q_\perp} - \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{l_{i\perp}}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\; e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{1\perp}}}\ldots e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{n\perp}}}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Il miglioramento sostanziale è che viene mantenuta la forma vettoriale dei momenti trasversi $\overrightarrow{l_{i\perp}}$ durante tutto il calcolo, permettendo in tal modo le sottrazioni (vettoriali) descritte sopra. In questo senso si può dire che lo spazio del parametro di impatto è quello "naturale" del processo, nel senso che preserva in modo automatico la conservazione del momento.

Con l'aggiunta dei contributi virtuali, i logaritmi del tipo di (3.2) che accompagnano le potenze della costante d'accoppiamento α_s vengono regolarizzati in forma di distribuzioni del tipo[10]

$$\left(\frac{1}{l_\perp^2}\ln^{2n-1}\frac{l_\perp^2}{Q^2}\right)_+ \tag{3.16}$$

Sotto la trasformazione di Fourier, queste generano fattori logaritmici nella variabile b della forma

$$\ln^{2n} b^2Q^2 \tag{3.17}$$

Una intuizione qualitativa di questo passaggio si può avere semplicemente considerando di svolgere esplicitamente l'integrazione

$$\int d^2l_\perp e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_\perp}}\frac{1}{l_\perp^2}\ln\frac{l_\perp^2}{Q^2} \tag{3.18}$$

dove $e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_\perp}}$, in prima approssimazione, può essere considerato produrre un cutoff superiore in $l_\perp \sim \frac{1}{b}$.[11]

[10] *Uso della prescrizione +.* Sia $h(x)$ una funzione con una singolarità, ad esempio, in $x = 0$. La "prescrizione +" $(h(x))_+$ è definita come una distribuzione che coincide dappertutto con la funzione $h(x)$ eccetto che in $x = 0$ e ha la proprietà che, per definizione,

$$\int_0^{x_0} dx f(x)\,(h(x))_+ = \int_0^{x_0} dx\,(f(x) - f(0))\,h(x)$$

essendo x_0 un cutoff arbitrario superiore e $f(x)$ un'appropriata funzione test.

Un modo alternativo per dare una definizione "intrinseca" è

$$(h(x))_+ = h(x) - \delta(x)\int_0^{x_0} dy h(y)$$

L'integrale con una funzione test restituisce la definizione precedente.

Si può intuire che passare alla prescrizione + corrisponde a tagliare la porzione (divergente) dell'integrale di $h(x)$ a ridosso della singolarità. Questo è precisamente l'effetto dell'aggiungere le correzioni virtuali, come discusso qualitativamente in §2.2

[11] Passaggi come questi sono svolti in dettaglio in §6.4.2.

Con la risommazione, questi termini logaritmici in b vengono racchiusi all'esponente del fattore di Sudakov, esattamente come nel caso dei logaritmi di $l_\perp$. Il livello di approssimazione LLA è definito dal fatto che ci si limita a tenere nell'esponente solo i fattori

$$\alpha_s^n \ln^{n+1}\left(b^2 Q^2\right) \tag{3.19}$$

ed è in questo schema che si svolge il calcolo di Parisi e Petronzio.

Il livello di accuratezza immediatamente successivo (NLL level: Next-to-Leading-Logarithms) consisterebbe nel trattenere nell'esponente anche i fattori del tipo

$$\alpha_s^n \ln^{n}\left(b^2 Q^2\right) \tag{3.20}$$

Inoltre è importante sottolineare che nella trattazione di Parisi e Petronzio, e in quelle successive che utilizzano lo stesso formalismo, si assume l'approssimazione iconale, ossia $l_\mu \ll p_\mu$ (essendo l_μ il quadrimomento del gluone emesso, e p_μ quello del partone) nel calcolo delle ampiezze di Feynman[12]. Nell'approssimazione dell'elettrodinamica (cioè trascurando i vertici gluone-gluone) è facile dimostrare che questo permette, in sostanza, di considerare indipendenti le emissioni dei vari gluoni, cioè di fattorizzare le ampiezze, e questo è un requisito fondamentale ai fini della risommazione. Tale proprietà di fattorizzazione persiste in QCD, almeno a livello di Leading Logarithms (cfr.[10], in particolare la conclusione, e le referenze al suo interno).

Formula risommata

Applicando il metodo descritto, il risultato ottenuto da Parisi e Petronzio è la seguente formula:

[12] Per maggiori dettagli sull'approssimazione iconale e sul concetto di emissioni indipendenti cfr.§6.2.

Nel seguito si cercherà, ove possibile, di distinguere i concetti di approssimazione iconale, di emissione soffice e di emissione collineare. Tutte si riferiscono alla piccolezza delle quantità relative al gluone emesso: la prima riguarda, come detto, il confronto tra il quadrimomento del gluone emesso e quello del partone che lo emette; la seconda significa assumere che il gluone radiato porti una energia piccola ($l_0 \to 0$); la terza significa assumere che il momento trasverso (rispetto al momento del partone) del gluone emesso sia molto piccolo ($l_\perp \to 0$). Per un gluone reale (on-shell) vale ovviamente la condizione $l_0^2 = l_\perp^2 + l_\parallel^2$; allora è chiaro che una emissione soffice è per forza anche collineare ma non viceversa.

$$\frac{d\sigma(AB \to l^+l^- + X)}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = \frac{1}{2}\int bdb\mathbf{J}_0(q_\perp b)\sigma_0(S)\frac{1}{Q^2}$$
$$\sum_f q_f^2 \left(D_{f/A}(x_1, \frac{1}{b^2}) D_{\overline{f}/B}(x_2, \frac{1}{b^2}) \mathbb{S}(Q,b) + (f \longleftrightarrow \overline{f}) \right) \quad (3.21)$$

dove[13]

$$\mathbb{S}(Q,b) \simeq \exp\left[\frac{16}{25}\ln\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2}\ln\left(\frac{\ln\left(1/b^2\Lambda_{QCD}^2\right)}{\ln\left(Q^2/\Lambda_{QCD}^2\right)}\right) + \ln b^2Q^2\right] \quad (3.22)$$

In questa formula: $\mathbf{J}_0(x)$ è la funzione di Bessel di prima specie[14] e proviene dall'integrazione sulla componente angolare di $\overrightarrow{b}$, e quindi l'integrale in b si riconosce essere il formalismo della trasformazione inversa di Fourier[15] per tornare allo spazio di $q_\perp$; Λ_{QCD} vale circa $200MeV$ ed è la ben nota scala di bassa energia della QCD; il resto delle notazioni ricalcano quelle di (3.7).

Si può verificare direttamente che in $q_\perp \to 0$ la distribuzione (3.21) assume un valore finito (l'integrale è dominato dalla regione dei b attorno a un punto a sella) e quindi l'andamento non fisico della DDT è evitato.

Limiti di validità e trattamento della regione non perturbativa

La validità dell'integranda della formula (3.21) è limitata alla regione

$$\frac{1}{Q} \leqslant b \leqslant \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \quad (3.23)$$

[13] In ref.[10] l'ultimo addendo logaritmico in questo esponente non è riportato. Riteniamo si tratti di un refuso.

[14] Le *funzioni di Bessel di prima specie* $\mathbf{J}_\nu(z)$ sono definite da

$$\mathbf{J}_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\;\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

In particolare per $\mathbf{J}_0$ vale anche la rappresentazione integrale

$$\mathbf{J}_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta e^{iz\cos\theta}$$

[15] Esplicitamente si ha

$$\int bdb\mathbf{J}_0(q_\perp b) = \frac{1}{2\pi}\int d^2b e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}$$

poichè la disuguaglianza di sinistra, di fatto, corrisponde al regime $q_\perp \ll Q$ in cui è stata ricavata (per la regione $q_\perp \sim Q$ è sufficiente il risultato della teoria perturbativa al primo ordine, senza risommazione), mentre la disuguaglianza di destra segnala l'entrata nella regione non perturbativa, ed infatti il logaritmo nell'esponente perde di significato. Si vede meglio il ruolo del limite $b \sim \frac{1}{\Lambda_{QCD}}$ interpretandolo come quella scala energetica in cui l'argomento della costante di accoppiamento $\alpha_s(\mu^2)$ raggiunge il polo di Landau $\mu \simeq \Lambda_{QCD}$, e quindi la costante diverge; questa modo di formulare il problema sarà più evidente nella presentazione del paragrafo successivo.

Siccome però l'integrazione sulla variabile b è intesa spaziare su $(0, +\infty)$, è necessario occuparsi anche di questi regimi estremi.

Nel lavoro di Parisi e Petronzio la regione non perturbativa ($b \gtrsim \frac{1}{\Lambda_{QCD}}$, b molto grandi) è trattata nel seguente modo: si trasla artificialmente di una quantità $M^2 > \Lambda_{QCD}^2$ l'argomento della costante di accoppiamento in modo che il polo di Landau "esca" dalla regione fisica. Il parametro M entra inevitabilmente nella formula definitiva ed è da determinare fenomenologicamente. L'arbitrarietà del trattamento della regione non perturbativa comporta comunque correzioni dell'ordine di una potenza di $b\Lambda_{QCD}$ nel risultato finale.

Inoltre è necessario introdurre una funzione correttiva $\rho(b)$ che moltiplica l'integranda per tenere conto della distribuzione di momento trasverso intrinseco dei partoni nell'adrone: è una ulteriore funzione fenomenologica, che si assume di tipo gaussiano dipendente da un parametro A determinabile solo sperimentalmente.

Riassumendo: la regione non perturbativa (la regione di grandi b) introduce due diverse fonti di impredicibilità (l'andamento al polo di Landau della costante di accoppiamento e la distribuzione di momento trasverso intrinseco negli adroni) incorporate in due parametri fenomenologici.

Nell'altro limite estremo (la regione di b piccoli) conviene affidarsi alla formula esatta NLO.

3.2.4 Estensione oltre i "Leading Logarithms"

Fino a questo punto lo schema di approssimazione utilizzato è quello della Leading Logarithm Approximation, perchè è in queste condizioni che si riesce a ridursi a considerare diagrammi di Feynman che si sanno risommare con relativa facilità (cfr.§3.2.1), ossia i "Ladder Diagrams". Essendo in grado di considerare e risommare tutti i contributi di diagrammi di Feynman dalla struttura più complicata di quella dei diagrammi a scala, si potrebbe raggiungere maggiori livelli di accuratezza nella formula finale.

Collins, Soper e Sterman ([11]) hanno saputo generalizzare l'approccio di Parisi e Petronzio e attuare una tale completa risommazione: il loro metodo mutua il linguaggio e le tecniche della rinormalizzazione a tutti gli ordini ed è stato inizialmente applicato al caso della produzione di getti adronici "back to back"[16] dalla collisione di e^+e^- ([12] [13]), per poi essere trasferito al calcolo della distribuzione di momento trasverso del processo tipo Drell-Yan. La formula conclusiva, che rappresenta la più avanzata espressione per la grandezza in considerazione, è:

$$\frac{d\sigma(AB \to l^+l^- + X)}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = \sigma_0(S)\frac{1}{Q^2}\frac{1}{4\pi}\int d^2b e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}} \sum_f q_f^2$$
$$\Big(D_{f/A}(x_1, \frac{c_1}{b}) D_{\overline{f}/B}(x_2, \frac{c_1}{b}) \mathbb{S}(Q,b) + \big(f \longleftrightarrow \overline{f}\big)\Big) \quad (3.24)$$

con

$$\mathbb{S}(Q,b) = \exp\left[-\int_{c_1^2/b^2}^{c_2^2Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2}\left(A\left(\alpha_s(\mu)\right)\ln\frac{c_2^2Q^2}{\mu^2} + B\left(\alpha_s(\mu)\right)\right)\right] \quad (3.25)$$

Essa ha validità nella regione $q_\perp \ll Q$; per $q_\perp \sim Q$ è previsto un addendo correttivo. In questa formula le notazioni per $\sigma_0(S)$, $D_{f/A}$ e $D_{\overline{f}/B}$ (e quanto non è esplicitamente diverso) sono le stesse di (3.7). Si riconosce il formalismo della trasformata inversa di Fourier dallo spazio del parametro di impatto $\overrightarrow{b}$ allo spazio del momento trasverso $\overrightarrow{q_\perp}$ $\left(\text{ossia } \frac{1}{2\pi}\int d^2b e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\right)$; la trasformazione diretta di Fourier non è mostrata esplicitamente in quanto è già svolta nel calcolo dei coefficienti A e B. c_1 e c_2 sono costanti di ordine 1, che a rigore compaiono anche nei coefficienti A e B.

$\mathbb{S}(Q,b)$ è la "nuova" espressione del fattore di Sudakov: i coefficienti A e B sono supposti calcolabili come serie di potenze nella costante di accoppiamento:

$$A\left(\alpha_s\right) = A_1\frac{\alpha_s}{\pi} + A_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \ldots \quad (3.26a)$$
$$B\left(\alpha_s\right) = B_1\frac{\alpha_s}{\pi} + B_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \ldots \quad (3.26b)$$

e allo stato attuale sono calcolati solo i coefficienti A_1, A_2, B_1, B_2. In

[16] Cioè: a momento trasverso nullo, quindi non c'è radiazione soffice da risommare.

particolare si ha:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= C_F && (3.27a)\\
A_2 &= \frac{67}{9} - \frac{\pi^2}{3} - \frac{10}{27}n_f + \frac{8\pi}{3}b_0 \ln\left(\frac{c_1 e^{\gamma_E}}{2}\right) \\
&\simeq \frac{1}{2}C_F\left[C_A\left(\frac{67}{18} - \frac{\pi^2}{6}\right) - \frac{10}{9}T_R n_f\right] && (3.27b)\\
B_1 &= 2C_F \ln\frac{c_1 e^{\gamma_E - 3/4}}{2c_2} \simeq -\frac{3}{2}C_F && (3.27c)
\end{aligned}
$$

dove γ_E è la costante di Eulero-Mascheroni ($\gamma_E \simeq 0.5772...$), $C_F = 4/3$, $C_A = 3$ e $T_R = 1/2$ in QCD e n_f è il numero dei sapori di quark attivi.

Lo schema di LLA è superato in quanto consisterebbe nel limitarsi a considerare il solo coefficiente A_1; il livello di NLL si ha includendo anche i coefficienti A_2 e B_1; inoltre, almeno formalmente, ogni successivo ordine è potenzialmente incluso in questa espressione del fattore di Sudakov.

La formula di Collins, Soper e Sterman (3.24) si riduce al risultato di Parisi e Petronzio (3.21) nel limite LL, come deve essere. Per svolgere esplicitamente il calcolo che mostra questa riduzione è necessario esprimere α_s per mezzo del primo termine dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione (cfr. Appendice B) e compiere esplicitamente le integrazioni su μ^2, avendo fissato ad 1 le costanti c_1 e c_2 (lecito a livello LL); i dettagli di questo calcolo sono del tutto simili a quelli sviluppati in §6.4, cui ci si può riferire.

Limiti di validità e trattamento della regione non perturbativa

Consideriamo più da vicino l'espressione (3.25) del fattore esponenziale di Sudakov $\mathbb{S}(Q, b)$. L'integrazione su b è intesa spaziare su $(0, +\infty)$: esattamente come nel caso del risultato finale di Parisi e Petronzio, si tratta allora di confrontarsi con i regimi estremi di b.

Regione non perturbativa, b molto grandi. Nella forma in cui è espressa la (3.25) è ancora più evidente il problema della trattazione del polo di Landau della costante di accoppiamento: il limite inferiore dell'integrale nel fattore di Sudakov raggiunge zero in corrispondenza di grandi b e questo è formalmente inaccettabile poichè la scala μ (argomento di α_s) non può scendere al di sotto di $\Lambda_{QCD} \simeq 200 MeV$, pena la divergenza della costante stessa. Si deve quindi imporre la condizione

$$b \leqslant \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \qquad (3.28)$$

Le stime eseguite da Collins, Soper e Sterman mostrano tra l'altro che, alle energie dei processi presi usualmente in considerazione, Q^2 non può essere sufficientemente grande da considerare irrilevante l'apporto dell'integrazione sui grandi b, e quindi questa regione va considerata con attenzione. Si sceglie di definire una variabile riscalata b^*

$$b^* = \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{b_{\max}}\right)^2}} \tag{3.29}$$

dove $b_{\max}$ rappresenta il valore massimo che può assumere b mantenendosi comunque fuori dalla regione non perturbativa (quindi $b_{\max} <\sim 1/\Lambda_{QCD}$; ad esempio $b_{\max} \sim 4GeV^{-1}$). Per b non troppo grandi ($b \ll b_{\max}$) si ha $b^* \simeq b$, e quindi la sostituzione (3.29) è ininfluente, ma la nuova variabile gode della proprietà che $b^* \leq b_{\max}$ sempre e quindi non si ha divergenza. Si rimpiazza allora b con b^* nella (3.25), che non presenta quindi più divergenze, e nella (3.24)

La procedura comporta però l'introduzione di una funzione correttiva che incorpori le differenze dovuta alla sostituzione $b \rightsquigarrow b^*$. Data la struttura della formula (3.24), il termine correttivo proveniente dalla sostituzione nell'esponente di Sudakov è dato dalla sottrazione di due integrali con estremi inferiori diversi, ossia da un termine della forma

$$\exp\left[-\int_{c_1^2/b^2}^{c_1^2/b^{*2}} \frac{d\mu^2}{\mu^2}(\dots)\right] \tag{3.30}$$

Altri termini correttivi sono dovuti alla sostituzione di b con b^* nelle funzioni di struttura D; di fatto quello che in questo caso si sta facendo è parametrizzare la distribuzione (incognita) di momento trasverso intrinseco dei partoni nell'adrone.

Svolgendo esplicitamente i calcoli necessari, si trova allora che la più generale forma che parametrizza gli effetti non perturbativi è (nella notazione di [14])

$$F^{NP}(Q, Q_0, x_1, x_2, b) = \exp\left[-\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}h_1(b) - h_{f/A}(x_1, b) - h_{f/B}(x_2, b)\right] \tag{3.31}$$

Il primo elemento contiene il parametro fenomenologico Q_0 e nasce dalla sostituzione $b \rightsquigarrow b^*$ nell'esponente di Sudakov; gli altri elementi nascono dalle funzioni di struttura e sono spesso scelti quadratici in b in modo che la distribuzione di momento trasverso intrinseco risulta gaussiana.

F^{NP} è da intendere come ulteriore fattore che moltiplica l'integranda, in modo tale che, schematicamente, la formula di Collins, Soper e Sterman si scrive

$$\frac{d\sigma}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = \sigma_0 \frac{1}{Q^2}\frac{1}{4\pi}\int d^2b e^{-i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \sum_{f=q,\overline{q}} e_f^2 D_{f/A} D_{\overline{f}/B} \cdot \mathbb{S} \cdot F^{NP} \tag{3.32}$$

Regione di b piccoli. A livello di Leading Logarithm, il contributo all'integrale di questa regione è rilevante più che altro nel caso che si cerchi la distribuzione a $q_\perp \sim Q$; in questa zona, come detto, il termine dominante è un addendo correttivo non mostrato. L'espressione discussa finora, però, produce ugualmente contributi non nulli che vanno considerati per ottenere una previsione affidabile: cfr. in proposito [14].

Di recente si è messo in luce [16] un problema (associato alla integrazione su questa regione) che si presenta nel caso si voglia spingere oltre il livello di Leading Logarithm l'accuratezza della formula di Collins, Soper e Sterman. Infatti limitarsi formalmente al livello di NLL permette di non includere termini che causerebbero una crescita fattoriale dei coefficienti della serie perturbativa. Il sospetto è che l'origine di queste "patologie" sia nell'inadeguatezza delle assunzioni su cui si fonda la procedura di risommazione rispetto alla regione dei grandi $q_\perp$ (corrispondente ai piccoli b); in particolare l'ipotesi iconale $l_\mu \ll p_\mu$ (che, tra l'altro, provvede alla fattorizzazione delle ampiezze di scattering) appare ovviamente infondata in questa regione.

Capitolo 4

Sezione d'urto totale in prossimità della soglia

Continuiamo a interessarci al processo di Drell-Yan. Vogliamo ora affrontare il calcolo della sezione d'urto totale per produzione di una coppia di massa fissa Q^2

$$\sigma(A + B \to \gamma^*(\to l^+ l^-) + X) \tag{4.1}$$

Il modello a partoni prescrive, schematicamente (cfr. Appendice C)

$$\sigma(S) = \int_0^1 dx_1 dx_2 f(x_1) f(x_2) \widehat{\sigma}(\widehat{s}) \tag{4.2}$$

dove $\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\widehat{s} = x_1 x_2 S, Q^2, \alpha_s)$ è la sezione d'urto partonica, $\sqrt{S}$ è l'energia nel centro di massa a livello adronico, ossia $S = \left(P + \overline{P}\right)^2$, e $\sqrt{\widehat{s}}$ è l'energia nel centro di massa a livello partonico, ossia $\widehat{s} = (x_1 p + x_2 \overline{p})^2$.[1]

Definiamo la quantità

$$\tau = \frac{Q^2}{S} \tag{4.3}$$

e definiamo la quantità

$$\widehat{\tau} = \frac{Q^2}{\widehat{s}} = \frac{\tau}{x_1 x_2} \tag{4.4}$$

[1]Le notazioni cinematiche sono quelle di fig.2.4. Il processo di Drell-Yan è rappresentato in fig.2.1

τ è una quantità "fissata" ossia determinata dalla massa invariante della coppia cercata e dall'energia totale del processo a livello adronico (per esempio l'energia nel centro di massa dei fasci incidenti); $\widehat{\tau}$ è invece una variabile del processo partonico.

Ovviamente la cinematica del processo partonico impone $\widehat{s} \geq Q^2$ (ed è chiaro che vale anche $S > \widehat{s}$): quindi $0 \leqslant \tau \leqslant \widehat{\tau} \leqslant 1$.

Si usa incorporare la (4.2) e la (4.4), esplicitando la dipendenza da τ e $\widehat{\tau}$, in un'unica formula

$$\sigma(\tau) = \int_0^1 dx_1 dx_2 d\widehat{\tau} x_1 f(x_1) x_2 f(x_2) \widehat{\sigma}(\widehat{\tau}) \delta(x_1 x_2 \widehat{\tau} - \tau) \tag{4.5}$$

dove è evidente che l'integrazione su $\widehat{\tau}$ (da intendersi come integrazione su $\widehat{s}$) è immediata e restituirebbe le espressioni precedenti. Questa forma proviene soltanto da un rimaneggiamento delle variabili e ha sostanzialmente il vantaggio di contenere in sè anche l'importante vincolo cinematico tra S e $\widehat{s}$.

Al livello di Born per il processo partonico, si ha l'uguaglianza tra $\widehat{s}$ e Q^2; al NLO (Next to Leading Order) invece è possibile anche la radiazione di gluoni di bremsstrahlung da parte dei partoni incidenti e quindi vale la disuguaglianza $\widehat{s} > Q^2$.

Come si è mostrato qualitativamente in §2.3, queste radiazioni apportano alla sezione d'urto fattori correttivi del tipo[2]

$$\ell'_{2n-1} = \frac{1}{1-\widehat{\tau}} \ln^{2n-1}(1-\widehat{\tau}) \tag{4.6}$$

ossia ordine per ordine in teoria perturbativa i coefficienti della serie in α_s contengono di questi fattori.

Supponiamo ora di fissare la massa della coppia registrata ad un valore $Q^2 \simeq S$: fisicamente significa porsi nelle condizioni di selezionare la produzione di una coppia "di grandissima massa invariante", al limite dell'utilizzo di tutta l'energia disponibile della collisione (adronica). In queste condizioni si ha che $\tau \to 1$, e quindi anche $\widehat{\tau} \to 1$, e di conseguenza le correzioni logaritmiche in (4.6) sono particolarmente rilevanti. Questo regime è indicato come situazione di *produzione alla soglia*.[3]

[2]Nella situazione che stiamo considerando, l'esponente $2n-1$ è il maggiore col quale possono comparire queste correzioni logaritmiche ad accompagnare il termine α_s^n, esattamente come nel caso dei logaritmi a piccolo momento trasverso.

[3]Vale forse la pena a questo punto sottolineare che il tradizionale concetto di soglia di produzione è differente da quello considerato qui: normalmente si chiama soglia di

Per la verità, anche per un valore di τ non estremamente vicino a 1 i logaritmi in (4.6) possono essere molto importanti: è sufficiente che si abbia $\widehat{\tau} \to 1$. Qualitativamente, ad esempio, si può pensare che un singolo partone di un protone porti un momento longitudinale grossomodo pari a un terzo del totale, e quindi che già in condizioni di $\widehat{s} = S/3$ il processo partonico sia in regime di soglia. In senso complessivo, comprendiamo entrambe queste sfumature nel concetto di produzione alla soglia.

Essere nel regime di produzione alla soglia significa limitare fortemente l'energia a disposizione dei gluoni di bremsstrahlung: al limite (cioè quando $Q^2 = \widehat{s}$, ossia l'energia entrante e uscente nel processo partonico sono coincidenti) l'emissione è totalmente inibita: come già nel caso delle grosse correzioni alla distribuzione rispetto al momento trasverso, i termini logaritmici del tipo di quello in (4.6) sono quindi una conseguenza dello spingersi ai confini dello spazio delle fasi dei gluoni reali emessi. Altarelli, Ellis e Martinelli [17] calcolarono al primo ordine perturbativo (considerando quindi una singola radiazione di gluone soffice) l'espressione esplicita della sezione d'urto partonica $\widehat{\sigma}(\widehat{\tau})$: la loro analisi del risultato mostrò nettamente per la prima volta la necessità di considerare in regime di soglia anche le correzioni di ordine superiore: è necessario quindi saper risommare le correzioni ℓ' a tutti gli ordini perturbativi per ottenere una stima affidabile della grandezza cercata.

La filosofia e l'impianto teorico di questa risommazione e dei risultati che si ottengono è quindi la stessa di quella che sottende l'analisi della sezione §3.2.

4.1 Trasformazione di Mellin e risommazione dei "Leading Logarithms"

L'analisi di fenomeni come quelli in esame viene più convenientemente effettuata passando dallo spazio di τ allo spazio dei momenti, attraverso la trasformazione di Mellin (cfr. Appendice D). La ragione profonda dell'utilità della trasformazione di Mellin è nel fatto che permette di disaccoppiare gli spazi delle fasi delle emissioni soffici, permettendo quindi la costruzione

produzione la situazione in cui l'energia entrante è appena sufficiente a fornire esattamente la massa a riposo dei prodotti. Nel nostro caso invece gli oggetti prodotti, di massa a riposo m_l, che può anche essere zero, si intendono uscenti a velocità non nulla, quindi con una massa invariante totale $Q^2 > 4m_l^2$.

di un fattore esponenziale. Questo è lo stesso compito che svolgeva la trasformazione di Fourier nell'ambito dello studio della distribuzione a piccolo momento trasverso (cfr.§3.2.3): la cinematica delle due situazioni è diversa e quindi le trasformazioni sono differenti, ma il principio è il medesimo. Approfondiremo questi concetti in particolare in §6.3.

Attuiamo quindi la trasformazionedi Mellin rispetto a τ sulla (4.5): quello che si ottiene è la fattorizzazione seguente

$$\begin{aligned}\sigma_N = \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}\tau^N\sigma(\tau) = \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1}x_1^N x_1 f(x_1)\int_0^1 \frac{dx_2}{x_2}x_2^N x_2 f(x_2)\int_0^1 \frac{d}{\widehat{\tau}}\widehat{\tau}^N\widehat{\sigma}(\widehat{\tau}) = \\ = F_{1,N+1}F_{2,N+1}\widehat{\sigma}_N \qquad (4.7)\end{aligned}$$

La regione di produzione alla soglia ($\widehat{\tau}\to 1$) va a corrispondere al limite $N\to\infty$: infatti la funzione $\widehat{\tau}^N$ (o meglio a rigore $\widehat{\tau}^{N-1}$), che compare come peso nell'espressione esplicita della trasformazione di Mellin, per $N\to\infty$ sopprime fortemente la regione lontana da 1.

La sezione d'urto partonica $\widehat{\sigma}_N$, come detto, contiene fattori come quello in (4.6) che rappresentano le radiazioni di gluoni reali. Con l'aggiunta delle correzioni virtuali si ottengono distribuzioni della forma

$$\left(\frac{1}{1-\widehat{\tau}}\ln^{2n-1}(1-\widehat{\tau})\right)_+ \qquad (4.8)$$

La trasformazione di Mellin traduce queste distribuzioni in logaritmi nella variabile N:

$$\ln^{2n} N \qquad (4.9)$$

Alcuni esempi di questi momenti ai più bassi ordini sono riportati in Appendice D.

Dopo la risommazione, questi termini vengono raccolti in un fattore esponenziale, che chiameremo ancora "di Sudakov". Si possono allora considerare diversi livelli di approssimazione[4] (come già riguardo ai logaritmi considerati in §3.2.3): lo schema di LLA consiste esplicitamente nel limitarsi a considerare nell'esponente fattori del tipo

$$\alpha_s^n \ln^{n+1} N \qquad (4.10)$$

[4]Una limpida stesura della classificazione dei logaritmi in N e dei livelli di approssimazione si trova per esempio nell'Introduzione di [29].

mentre il livello NLL è raggiunto tenendo conto nell'esponente anche di fattori come

$$\alpha_s^n \ln^n N \tag{4.11}$$

La prima risommazione completa in LLA è stata ottenuta da Parisi [18] (con argomenti "euristici"), e indipendentemente da Curci e Greco [19] [20], trasferendo al caso presente il formalismo utilizzato per lo studio degli stati coerenti. Il risultato è, come previsto, un fattore esponenziale di Sudakov che moltiplica il momento della sezione d'urto partonica di Born $\widehat{\sigma}_{0N}$.

4.2 Risommazione fino ai "Next to Leading Logarithms"

Una completa risommazione che tenga conto dei fattori fino ai NLL è stata ottenuta da Catani e Trentadue [22].

L'impianto generale del calcolo è il seguente. Si considera al solito la singola correzione radiativa in approssimazione iconale (ossia trascurando il quadrimomento del gluone emesso rispetto a quello del partone che lo emette); questo permette il calcolo dell'ampiezza di emissione disaccoppiata dal processo forte, sia al livello di LL che di NLL; si tratta allora di risommare un numero arbitrario di emissioni, generando il fattore esponenziale di Sudakov. L'argomento della costante di accoppiamento è valutato alla scala del momento trasverso $l_\perp^2$ del processo di emissione, e non del processo forte (Q^2), secondo le indicazioni di [40] e [41], e questo è importante poichè l'evoluzione della costante di accoppiamento via equazione del gruppo di rinormalizzazione introduce ulteriori logaritmi.

Il risultato è la seguente espressione per la sezione d'urto σ_N, nello schema $\overline{MS}$:

$$\sigma_N = F_{1,N+1} F_{2,N+1} \widehat{\sigma}_{0N} \mathbb{S}(Q,N) \tag{4.12}$$

con

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(Q,N) = \exp\bigg\{ -\int_0^1 dz \frac{z^N - 1}{1-z} \bigg[2\int_{(1-z)^2 Q^2}^{\mu^2} \frac{dk^2}{k^2} A(\alpha_s(k^2)) \\ + B\Big(\alpha_s\big((1-z)Q^2\big)\Big) \bigg] \bigg\}\end{aligned} \tag{4.13}$$

dove

$$A\left(\alpha_s\right) = \frac{\alpha_s}{\pi}A_1 + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 A_2 \tag{4.14a}$$

$$B\left(\alpha_s\right) = \frac{\alpha_s}{\pi}B_1 \tag{4.14b}$$

e i coefficienti A_1, A_2, B_1 sono calcolati e sono gli stessi utilizzati anche da Collins, Soper e Sterman in (3.27). Si riconosce il formalismo della trasformazione di Mellin diretta $z^N - 1$, dove il -1 è generato dalla sottrazione dei contributi virtuali; l'integrazione su k^2 è invece di fatto quella sulla componente trasversa del momento dei gluoni radiati.

4.2.1 Limiti di validità

Il range di definizione della integranda è limitato alla regione

$$1 \ll N^2 \ll \frac{1}{4}\frac{Q^2}{\Lambda^2} \tag{4.15}$$

Infatti $N \gg 1$ traduce la situazione di soglia in cui si è ambientato il calcolo, mentre la disuguaglianza di destra permette di mantenersi al di sopra della regione non perturbativa. Questo si può vedere nel modo seguente: il fattore di Sudakov in (4.13) non è ben definito, poichè l'integrazione su k^2 fa sì che l'argomento della costante di accoppiamento incontri il polo di Landau, in corrispondenza di $z \to 1$, cioè per emissione estremamente soffice. Di fatto, però, la regione di z molto vicina a 1 è fortemente soppressa dalla espressione $z^N - 1$. Si può dimostrare che quest'ultima può essere sostituita da $-\Theta(1-z-N_0/N)$ con $N_0 = e^{-\gamma_E}$ apportando correzioni di ordine superiore a NLL. E' immediato ora verificare che il polo di Landau viene raggiunto per $N^2 = N_0^2 \frac{Q^2}{\Lambda^2} \simeq \frac{1}{4}\frac{Q^2}{\Lambda^2}$.

Di conseguenza riscriviamo il fattore $\mathbb{S}(Q,N)$ come[5]

$$\mathbb{S}(Q,N) = \exp\left\{-\int_0^{1-N_0/N} dz \frac{1}{1-z}\left[2\int_{(1-z)^2Q^2}^{\mu^2} \frac{dk^2}{k^2} A(\alpha_s(k^2)) + B\Big(\alpha_s\big((1-z)Q^2\big)\Big)\right]\right\} \tag{4.16}$$

[5]Per quanto appena discusso sull'approssimazione della Θ, questa riscrittura è corretta fino al livello NLL.

Eseguendo esplicitamente le integrazioni in (4.13) o in (4.16) in approssimazione di NLL si ottiene l'espressione per il fattore di Sudakov in termini di N:

$$\mathbb{S}(Q,N) = \exp\left[\ln N \; g_1(b_0\alpha_s \ln N) + g_2(b_0\alpha_s \ln N)\right] \tag{4.17}$$

con

$$g_1(\lambda) = \frac{A_1}{\pi b_0 \lambda}\left[2\lambda + (1-2\lambda)\ln(1-2\lambda)\right] \tag{4.18a}$$

$$\begin{aligned} g_2(\lambda) &= -\frac{A_2}{\pi^2 b_0^2}\left[2\lambda + \ln(1-2\lambda)\right] - \frac{2A_1\gamma_E}{\pi b_0}\ln(1-2\lambda) \\ &\quad + \frac{A_1 b_1}{\pi b_0^3}\left[2\lambda + \ln(1-2\lambda) + \frac{1}{2}\ln^2(1-2\lambda)\right] \end{aligned} \tag{4.18b}$$

dove b_0 e b_1 sono i primi due coefficienti dell'equazione del gruppo di rinormalizzazione per la QCD (cfr. Appendice B) funzione b di QCD ($b_0 = \frac{11C_A - 4T_R n_f}{12\pi}$, $C_A = 3$, $T_R = 1/2$, n_f è il numero dei sapori attivi). La funzione $g_1(\lambda)$ risomma tutti i contributi di ordine LL, mentre la funzione $g_2(\lambda)$ fornisce i termini di ordine NLL.

Capitolo 5

Estensione al caso di produzione di quark pesanti

Occupiamoci ora brevemente del passaggio dal processo di Drell-Yan al processo fortemente analogo di produzione di una coppia di quark pesanti.

In questo caso il prodotto della annichilazione dei due partoni è la coppia $\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}}$ (dove $\mathbf{q}$ è per esempio *charm*, *bottom*, *top*):

$$A + B \to \mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} + X \tag{5.19}$$

La richiesta che i prodotti siano quark pesanti è in un certo senso la trasposizione della condizione di "grande massa invariante" per la coppia uscente dal processo di Drell-Yan.

Grazie alla maggiore ricchezza di accoppiamenti propri della QCD, i possibili processi partonici di livello Born sono più numerosi in questo caso rispetto al caso di DY: essi sono delle forme

$$q + \overline{q} \;\; \to \;\; \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} \tag{5.20}$$

$$g + g \;\; \to \;\; \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} \tag{5.21}$$

e sono rappresentati in fig.5.1 e 5.2. La fusione quark-antiquark è del tutto analoga all'unico processo partonico considerato nella fig.2.1, mentre i vari tipi di fusione gluone-gluone sono originali della teoria QCD.[1]

Il salto qualitativo rispetto al processo di DY analizzato fino ad ora è dovuto principalmente ai seguenti motivi:

[1]In linea di principio, un ulteriore processo partonico da includere è l'annichilazione di due partoni-quark in un fotone molto massivo (fig.5.2e), ma è chiaro che tale contributo sarebbe di ordine α_{em}^2, e quindi irrilevante a confronto con gli altri grafici di ordine α_s^2.

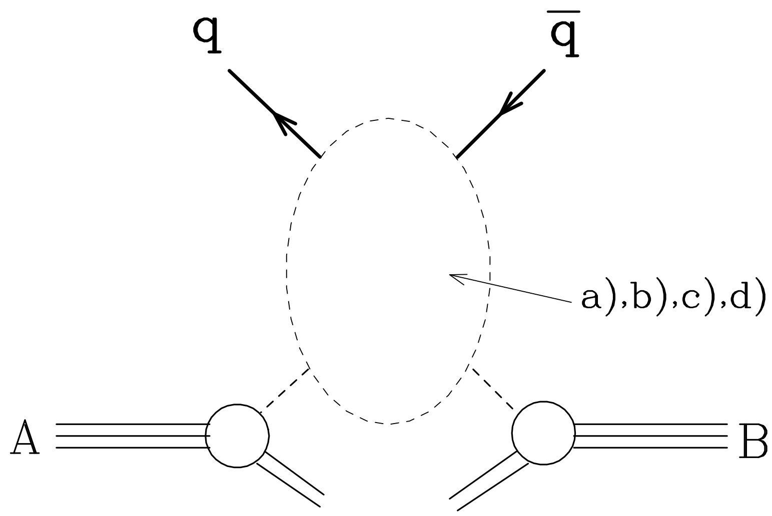


Figura 5.1: Processo di produzione di una coppia di quark pesanti. Al posto dell'ellisse tratteggiato si ha uno dei processi partonici illustrati nella figura seguente.

1. la maggiore varietà di processi partonici possibili;

2. l'impossibilità di trascurare la massa $m_{\mathbf{q}}$ dei prodotti e quindi...

3. la comparsa di una ulteriore scala energetica che caratterizza il processo, rappresentata dalla massa a riposo $m_{\mathbf{q}}$ dei quark prodotti; questa va ad aggiungersi alle scale energetiche già considerate (S, $\widehat{s}$, Q^2, l'energia delle emissioni di bremsstrahlung) i rapporti tra le quali, come si è visto fin qui, sono all'origine degli effetti importanti;

4. il fatto che i prodotti dello stato finale siano quark: rende possibili le radiazioni di gluoni anche dallo stato finale, e altri effetti più complessi come, per esempio, lo scambio di gluoni tra un partone dello stato iniziale e uno dello stato finale;

5. l'entrata in gioco di particelle dotate di carica di colore.

Inoltre può essere utile osservare che in questo caso la massa a riposo $m_{\mathbf{q}}$ dei quark prodotti rappresenta effettivamente una soglia nel senso tradizionale del termine, cioè l'energia disponibile deve essere superiore a $4m_{\mathbf{q}}^2$ perchè avvenga il processo. Si definiscono allora anche le quantità

$$\rho = \frac{4m_{\mathbf{q}}^2}{S} \qquad \widehat{\rho} = \frac{4m_{\mathbf{q}}^2}{\widehat{s}} \tag{5.22}$$

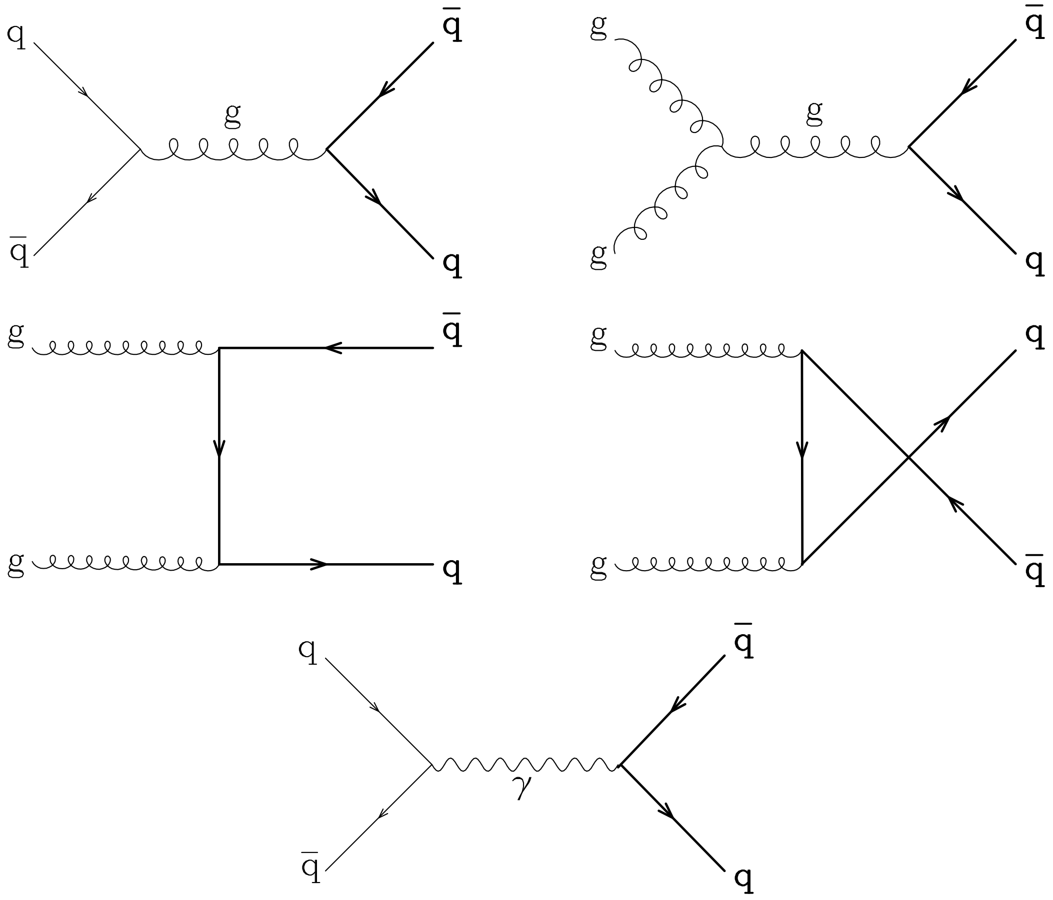


Figura 5.2: Processi partonici di livello Born per la produzione di una coppia di quark pesanti

che ricalcano le definizioni di τ e $\widehat{\tau}$ date sopra. Di fatto queste quantità rappresentano dei limiti inferiori per τ e $\widehat{\tau}$.

5.1 Sezione d'urto totale alla soglia

Occupiamoci dapprima di calcolare la sezione d'urto totale in un regime di soglia.

Seguendo una linea del tutto analoga a quella percorsa per Drell-Yan, partiamo dalla formula del modello a partoni (4.5), applichiamo la trasformazione di Mellin come in (4.7) e risommiamo le correzioni alla sezione d'urto partonica.

Abbiamo quindi bisogno del calcolo dell'espressione NLO della sezione d'urto partonica, di cui poi calcolare i momenti. Essa è stata calcolata da Nason, Dawson e Ellis [24]. I processi partonici da considerare sono

$$q + \overline{q} \rightarrow \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} + g \tag{5.23a}$$
$$g + g \rightarrow \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} + g \tag{5.23b}$$
$$g + q \rightarrow \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} + q \tag{5.23c}$$
$$g + \overline{q} \rightarrow \mathbf{q} + \overline{\mathbf{q}} + \overline{q} \tag{5.23d}$$

Le sezioni d'urto risultano essere della forma

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_{ij}(\widehat{s}, m_{\mathbf{q}}, \mu) &= \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{m_{\mathbf{q}}^2} f_{ij}(\widehat{\rho}, \mu^2/m_{\mathbf{q}}^2) = \\ &= \frac{\alpha_s^2(\mu^2)}{m_{\mathbf{q}}^2} \left[f_{ij}^{(0)}(\widehat{\rho}) + 4\pi\alpha_s(\mu^2) \left(f_{ij}^{(1)}(\widehat{\rho}) + \overline{f_{ij}^{(1)}}(\widehat{\rho}) \ln \frac{\mu^2}{m_{\mathbf{q}}^2} \right) \right]\end{aligned} \tag{5.24}$$

dove μ è la scala di fattorizzazione, alla quale sono valutate le funzioni di densità partoniche. Gli indici ij distinguono i vari processi partonici: $ij = q\overline{q}$, gg, gq, $g\overline{q}$. I termini $f_{ij}^{(0)}$ rendono conto delle sezioni d'urto a livello Born, mentre le correzioni al primo ordine sono contenute nelle $f_{ij}^{(1)}$ e nelle $\overline{f_{ij}^{(1)}}$. Le prime hanno una forma analitica non complicatissima, le terze hanno ne hanno una piuttosto involuta, mentre le seconde sono determinate attraverso fit numerici, che comunque risultano molto affidabili, e inoltre dipendono dallo schema di rinormalizzazione.

Una prima importante osservazione è che risultano $f_{ij}^{(0)} = 0$ per i canali $ij = gq$, $g\overline{q}$, come ci si aspetta dal fatto che i processi partonici (5.23c) e (5.23d) sono di un ordine superiore al Born. Nel seguito ci limiteremo a considerare dunque i processi più rilevanti, ossia l'annichilazione $q\overline{q}$ e gg, e le loro correzioni al primo ordine, ossia (5.23a) e (5.23b).

Una forma più trasparente per le stesse grandezze è la seguente, valida per processi ad alte energie

$$\widehat{\sigma}_{ij}(\widehat{s}, m_{\mathbf{q}}, \mu) = \widehat{\sigma}_{0ij}\left[1 + C\alpha_s(m_{\mathbf{q}}^2)\ln^2(1-\widehat{\rho})\right] \tag{5.25}$$

(con $\widehat{\sigma}_{0ij} = \frac{\alpha_s^2(m_{\mathbf{q}}^2)}{m_{\mathbf{q}}^2} f_{ij}^{(0)}(\widehat{\rho})$ le sezioni d'urto di Born) dove si vede esplicitamente la comparsa dei logaritmi di soglia. I fattori C (uno per ognuno dei processi partonici) sono costanti in questo limite e dipendono dallo schema di rinormalizzazione.

I gluoni indicati nello stato finale di (5.23a) e (5.23b) possono essere emessi dalle particelle di stato iniziale o di stato finale: questo aspetto una delle più significative differenze col caso DY. E' importante però comprendere che le emissioni dallo stato finale (e quindi le divergenze ad esse associate) non possono essere collineari ma soltanto soffici, a causa del fatto che le particelle che le emettono sono di massa non nulla. Una spiegazione qualitativa di questo fatto è proposta nella nota 5 a margine del calcolo della ampiezza di scattering di annichilazione in §6.1.2.

La conseguenza molto rilevante è che i grossi logaritmi apportati da queste radiazioni di stato finale sono solo di ordine NLL. Una intuizione di questo rapporto causa-effetto è possibile ricordando che i doppi logaritmi provengono dalle divergenze soffici e collineari sovrapposte.

Forti di questa semplificazione, comprendiamo che, a livello LL, il processo di produzione di una coppia di quark pesanti iniziato da $q\overline{q}$ si presenta assolutamente analogo al processo di DY; per quello iniziato da gg si tratta in sostanza di sostituire gluoni ai partoni iniziali ma la struttura è sostanzialmente la stessa; in particolare la fonte delle grosse correzioni logaritmiche resta la radiazione di gluoni soffici dallo stato iniziale.

5.1.1 Risommazione "Leading Logarithms"

La risommazione dei grossi logaritmi di soglia, come al solito, può essere svolta, in linea di principio, a diversi livelli di accuratezza.

Laenen, Smith e van Neerven ([26] [27]) ottennero la formula risommata al livello di LL: nello schema $\overline{MS}$:

$$\widehat{\sigma}_{ij}(\widehat{s}) = \widehat{\sigma}_{0ij}\mathbb{S}(m_{\mathbf{q}}^2, \widehat{\rho}) \tag{5.26}$$

con

$$\mathbb{S}(m_{\mathbf{q}}^2, \widehat{\rho}) = \exp\left[C\alpha_s((1-\widehat{\rho})^{3/2}\, m_{\mathbf{q}}^2) \cdot \ln^2(1-\widehat{\rho})\right] \tag{5.27}$$

La struttura generale è quella prevista: un fattore di Sudakov esponenziale che incorpora la soppressione dovuta alle correzioni radiative e si comporta da fattore correttivo per la sezione d'urto di Born.

Il procedimento di risommazione di Laenen, Smith e van Neerven fa però a meno del passaggio allo spazio degli N tramite trasformazione di Mellin: l'indubbio vantaggio che si cerca di ottenere è quello di evitare la procedura di integrazione numerica che è necessaria per ritornare dallo spazio di Mellin allo spazio di τ. Di fatto, però, questa procedura rende necessaria l'introduzione di un cutoff molto grande $\mu_0 \gg \Lambda_{QCD}$ che limita fortemente la validità della formula risommata, ben al di sopra della regione non perturbativa. Questa limitazione appare dunque infondata fisicamente.

Indipendentemente, tra l'altro, anche altri autori ([28]) hanno ottenuto formule risommate al livello LL, utilizzando procedimenti di risommazione alternativi al passaggio nello spazio di Mellin (ad esempio utilizzando il concetto di Valore Principale di un integrale): anche in questo caso i risultati sono afflitti da una ingiustificata limitazione ad energie molto superiori alla regione non perturbativa.

Come messo in evidenza da [23] [31], il punto è che, seppure sia formalmente lecito nella ricerca di una formula con precisione di Leading Logarithms nello spazio di τ trascurare termini che risultano subleading, questo espone alcune divergenze che non sarebbero comparse in una forma più accurata. La ragione profonda è che la risommazione nello spazio dei τ effettuata a LL non rispetta la conservazione del momento longitudinale che lega gli spazi delle fasi dei gluoni di bremsstrahlung. Il formalismo della trasformazione di Mellin, invece, permette la fattorizzazione di ogni emissione e quindi "tiene automaticamente conto" del vincolo. Di fatto, quindi, il passaggio nello spazio degli N è necessario anche per la derivazione di una formula risommata LL.

Catani, Mangano, Nason e Trentadue ([23]) hanno dunque applicato la stessa procedura seguita nel caso di Drell-Yan e ottenuto la seguente formula risommata a livello LL per la sezione d'urto totale partonica, che rappresenta quindi l'estensione al caso di produzione di quark pesanti della (4.12):

$$\widehat{\sigma}_{ij,N} = \widehat{\sigma}_{0ij,N} \mathbb{S}(m_{\mathbf{q}}^2, N) \tag{5.28}$$

con

$$\mathbb{S}(m_{\mathbf{q}}^2, N) = \exp\left[\ln N \; g_{1,ij}(b_0 \alpha_s \ln N)\right] \tag{5.29}$$

dove le funzioni $g_{1,ij}(\lambda)$ sono legate alla funzione $g_1(\lambda)$ di (4.18a) semplicemente da fattori di colore, e cioè si ha

$$g_{1,q\overline{q}}(\lambda) = g_1(\lambda) \tag{5.30a}$$

$$g_{1,gg}(\lambda) = \frac{C_A}{C_F} g_1(\lambda) \tag{5.30b}$$

Queste formule mostrano che, come si prevedeva, il processo iniziato da $q\overline{q}$ rispecchia totalmente il processo DY, mentre il processo iniziato da gg comporta soltanto la sostituzione del fattore di colore C_F con C_A. Ribadiamo che queste semplici conclusioni sono valide a livello LL. Estensioni della risommazione al livello NLL sono state già considerate da vari autori, in particolare Kidonakis e Sterman [32]; Bonciani, Catani, Mangano, Nason [29].

5.2 Distribuzione di momento trasverso della coppia di quark pesanti

La maggior parte della fatica necessaria per ottenere la distribuzione di momento trasverso $q_\perp$ anche per una coppia di quark pesanti, nella regione di piccolo $q_\perp$, è già stata fatta nel paragrafo precedente, avendo ricavato l'espressione per le sezioni d'urto NLO, avendo osservato che l'annichilazione nei canali gq e $g\overline{q}$ è trascurabile e avendo compreso che i logaritmi di livello LL provengono esclusivamente dalla radiazione di stato iniziale.

Berger e Meng [30], per esempio, si sono occupati di stendere l'estensione formale della distribuzione di momento trasverso al caso di produzione di quark pesanti. Quello che ci aspettiamo è una formula con la struttura di quella di Collins, Soper e Sterman (3.24) ed infatti si ottiene

$$\frac{d\sigma(AB \to \mathbf{q\overline{q}} + X)}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = \sum_{i,j=q,\overline{q},g} \sigma_{ij0}(S) \frac{1}{Q^2} \frac{1}{4\pi} \int d^2 b e^{-i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}$$

$$D_{i/A}(x_1, \frac{c_1}{b}) D_{\overline{j}/B}(x_2, \frac{c_1}{b}) \mathbb{S}(Q,b) \tag{5.31}$$

con

$$\mathbb{S}(Q,b) = \exp\left[- \int_{c_1^2/b^2}^{c_2^2 Q^2} \frac{d\mu^2}{\mu^2} \left(A_{ij}\left(\alpha_s(\mu)\right) \ln \frac{c_2^2 Q^2}{\mu^2} + B_{ij}\left(\alpha_s(\mu)\right) \right) \right] \tag{5.32}$$

Le notazioni sono esattamente le stesse di (3.24). In questo caso, però, la sezione d'urto di Born dipende dal particolare processo partonico e non può essere raccolta dalla sommatoria. I coefficienti A_{ij} e B_{ij} sono sviluppabili in serie di potenze di α_s come in (3.26)

$$A_{ij}(\alpha_s) = A_{ij,1}\frac{\alpha_s}{\pi} + A_{ij,2}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \ldots \tag{5.33a}$$

$$B_{ij}(\alpha_s) = B_{ij,1}\frac{\alpha_s}{\pi} + B_{ij,2}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \ldots \tag{5.33b}$$

I primi coefficienti di queste espansioni possono essere ricavati dal confronto dello sviluppo all'ordine α_s di questa formula con l'espressione esatta NLO (cfr.[30]) ed è utile riportarli e commentarli. Per i coefficienti $A_{ij,1}$ si ha

$$A_{q\overline{q},1} = C_F \qquad A_{gg,1} = C_A \qquad A_{gq,1} = 0 \qquad A_{g\overline{q},1} = 0 \tag{5.34}$$

Per i coefficienti $B_{ij,1}$ distinguiamo due parti, corrispondenti alla radiazione di stato iniziale o finale:

$$B_{ij,1} = B^I_{ij,1} + B^F_{ij,1} \tag{5.35}$$

con

$$B^I_{q\overline{q},1} = -\tfrac{3}{2}C_F \qquad B^F_{q\overline{q},1} = 2C_F + 2C_F\frac{\ln\xi}{\beta}\left(1 - \frac{2m^2_{\mathbf{q}}}{Q^2}\right) \tag{5.36a}$$

$$B^I_{gg,1} = -b_0 \qquad B^F_{gg,1} = 2C_F + 2C_F\frac{\ln\xi}{\beta}\left(1 - \frac{2m^2_{\mathbf{q}}}{Q^2}\right) \tag{5.36b}$$

$$B^I_{gq,1} = 0 \qquad B^F_{g\overline{q},1} = 0 \tag{5.36c}$$

essendo $\beta = \sqrt{1 - 4m^2_{\mathbf{q}}/Q^2}$, $\xi = \frac{1-\beta}{1+\beta}$ (e $m_{\mathbf{q}}$ la massa del quark $\mathbf{q}$ come in precedenza). Da queste espressioni è agevole ricevere la conferma delle proprietà esaminate in precedenza:

- l'annichilazione gq e $g\overline{q}$ non dà contributi al fattore di Sudakov a questo livello;
- limitarsi al livello LL significa considerare solo i coefficienti $A_{ij,1}$; in questo caso:
  - il coefficiente $A_{q\overline{q},1}$ coincide esattamente con A_1 della formula di Collins, Soper e Sterman, quindi il processo iniziato dall'annichilazione $q\overline{q}$ rispecchia in tutto e per tutto il processo di Drell-Yan,

  - si aggiunge rispetto al caso di DY il processo iniziato da gg e comporta semplicemente la sostituzione del coefficiente C_F con C_A, come già succedeva nella formula per la sezione d'urto totale alla soglia (5.28),
  - non sono presenti coefficienti riconducibili alla radiazione dallo stato finale;

- spingersi al livello NLL comporterebbe l'entrata in gioco dei coefficienti $B_{ij,1}$; in questo caso:

  - il coefficiente $B_{q\bar{q},1}$ ha una parte $B^I_{q\bar{q},1}$ corrispondente alla radiazione di stato iniziale che coincide esattamente con B_1 della formula di Collins, Soper e Sterman, ma si aggiunge anche una parte $B^F_{q\bar{q},1}$ portata dalla radiazione di stato finale che non ha equivalente in Drell-Yan,
  - il processo iniziato da gg è del tutto nuovo.

Capitolo 6

La distribuzione di momento trasverso in condizioni di soglia: trattamento consistente dell'intersezione dei regimi cinematici

Siamo interessati al calcolo della distribuzione di momento trasverso del fotone massivo prodotto dall'annchilazione di un quark e di un antiquark nel processo di Drell-Yan, nella condizione in cui la sua massa invariante sia prossima all'energia entrante nel centro di massa, cioè in situazione di soglia. Il bosone, eventualmente, decade nella coppia leptone-antileptone ma questo aspetto del fenomeno non è rilevante per i nostri scopi.

In questo "doppio regime" i formalismi relativi al calcolo della distribuzione di momento trasverso e della sezione d'urto alla soglia, già analizzati precedentemente in modo separato, si fondono.[1] Ripartiamo allora dall'inizio per costruire una trattazione adatta alla presente situazione.

La grandezza che presenteremo è

$$\frac{d}{d^2 q_\perp}\sigma(S, Q^2) \tag{6.1}$$

essendo $S = \left(P + \overline{P}\right)^2$ l'energia nel centro di massa a livello adronico, Q^2 la massa (fissata) del bosone e $q_\perp$ il momento trasverso (rispetto all'asse di

[1]In [41] si era già intrapresa questa strada, ma con una ispirazione differente.

incidenza degli adroni) del bosone massivo (per le notazioni cinematiche si può sempre fare riferimento alla fig.2.4)

Porremo allora particolare attenzione alla regione in cui contemporaneamente si ha

- piccolo momento trasverso ($q_\perp \ll Q$) e
- grande massa invariante ($Q^2 \simeq S$).

Il Modello a Partoni prescrive il calcolo della quantità partonica che va poi convoluta con le funzioni di densità partonica $f(x_i)$ dei quark incidenti per ottenere quella adronica; in formula, cioè, si può scrivere schematicamente[2]:

$$\frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \int dx_1 dx_2 f(x_1) f(x_2) \frac{d}{d^2q_\perp}\widehat{\sigma}(\widehat{s},Q^2) \tag{6.2}$$

Si definiscono le variabili $\tau = \frac{Q^2}{S}$ e $\widehat{\tau} = \frac{Q^2}{\widehat{s}}$; dato che il legame tra l'energia entrante a livello adronico (S) e a livello partonico ($\widehat{s}$) è $\widehat{s} = x_1 x_2 S$, allora vale

$$\tau = x_1 x_2 \widehat{\tau} \tag{6.3}$$

Nella regione di soglia è comodo incorporare la (6.2) e la (6.3) in un'unica espressione, ottenendo:

$$\frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \int d\widehat{\tau} dx_1 dx_2 x_1 f(x_1) x_2 f(x_2) \frac{d}{d^2q_\perp}\widehat{\sigma}(\widehat{s},Q^2)\delta(x_1 x_2 \widehat{\tau} - \tau) \tag{6.4}$$

Iniziamo dunque col calcolare la quantità partonica $\frac{d}{d^2q_\perp}\widehat{\sigma}(\widehat{s},Q^2)$.

La linea che seguiremo origina dall'esperienza sviluppata nell'analisi separata dei due regimi ai margini dello spazio delle fasi e li sovrappone. In particolare, come visto in dettaglio in precedenza, il punto concettualmente più rilevante è quello della risommazione dei contributi originati dall'emissione

[2]Agli effetti di questo calcolo immaginiamo inizialmente che l'annichilazione avvenga tra una coppia di q e $\overline{q}$ ben definiti (ad esempio u e $\overline{u}$...), con una certa carica elettrica (uguale ed opposta); l'estensione necessaria per tenere conto dei quark di tutti i sapori è immediata e comporta semplicemente la somma su tutte le coppie, pesata con la carica di ogni coppia; questa estensione verrà implementata alla fine.

di un numero arbitrario di gluoni soffici dallo stato iniziale. La risommazione può essere effettuata a condizione di realizzare la *fattorizzazione* dei vari contributi. Quest'ultima a sua volta si ottiene dal passaggio allo spazio del parametro di impatto $\overrightarrow{b}$ (che fattorizza la componente trasversa degli spazi delle fasi dei gluoni radiati) e allo spazio di Mellin (che fattorizza la componente longitudinale degli stessi spazi delle fasi), oltre che dalla fattorizzazione delle ampiezze di Feynman, che riposa sulla assunzione di approssimazione iconale.

Nei paragrafi seguenti riprendiamo ognuno dei concetti appena illustrati. In particolare ci occuperemo quindi di:

1. calcolare il mattone elementare, ovvero la distribuzione di momento trasverso partonica con emissione di un singolo gluone dallo stato iniziale;

2. passare al caso di emissione di n gluoni, giustificando l'assunzione di emissioni indipendenti (approssimazione iconale); la conservazione dei momenti e dell'energia impone comunque un vincolo cinematico che allaccia tutti i gluoni emessi;

3. fattorizzare il vincolo che lega i momenti trasversi dei gluoni radiati grazie alla trasformazione di Fourier sul momento trasverso totale $q_\perp$ e quello che lega le energie grazie alla trasformazione di Mellin sulla variabile τ; si passa quindi alle variabili coniugate b ed N;

4. realizzare la risommazione (esponenziazione) delle n emissioni, costruendo quindi il fattore di Sudakov che moltiplica la sezione d'urto di Born;

5. esplicitare la forma analitica del fattore di Sudakov ottenuto: questa rappresenta il nostro risultato finale.

Il calcolo è tutto portato avanti nell'ipotesi di LLA.

Ottenuta la formula finale, è necessario analizzarne i limiti e le proprietà a paragone con le formule già esistenti per i due regimi ai margini dello spazio delle fasi. Provvederemo allora a:

1. interrogarci sui suoi limiti di validità, in particolare in relazione al raggiungimento della regione non perturbativa;

2. verificare che, nel caso ci si ponga sufficientemente lontani dalla soglia, restituisca la formula di Parisi e Petronzio o, equivalentemente, quella di Collins, Soper e Sterman, calcolata considerando solo i contributi di Leading Logarithms;

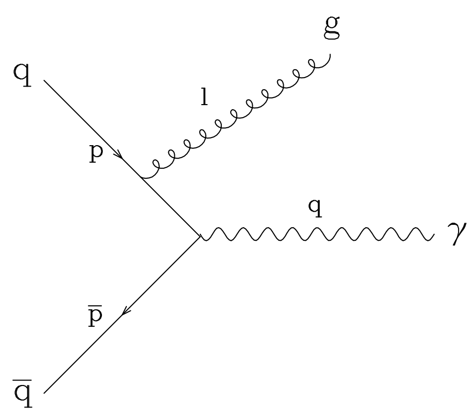


Figura 6.1: Annichilazione di quark e di antiquark in un fotone con radiazione di un (solo) gluone

3. verificare che, nel caso si integri la distribuzione su tutti i momenti trasversi, rimanendo nella regione di soglia, restituisca la formula di Catani e Trentadue, limitatamente ai Leading Logarithms;

4. verificare che lo sviluppo al primo ordine vada a coincidere con il calcolo esatto NLO in regolarizzazione dimensionale riportato in Appendice E.

6.1 Calcolo della distribuzione di momento trasverso con una sola emissione

Concentriamo l'attenzione sul calcolo della sezione d'urto corrispondente al grafico di Feynman in fig.6.1: si tratta dell'annichilazione $q\overline{q}$ con produzione di un bosone vettore di massa Q, con radiazione di un gluone (poi assunto soffice) dal quark (antiquark) incidente.

La sezione d'urto è data da (con le notazioni cinematiche della fig.6.1):

$$d\widehat{\sigma} = \frac{1}{2\widehat{s}} \frac{d^3 l}{(2\pi)^3\, 2l_0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3\, 2q_0} \left|\overline{M}\right|^2 (2\pi)^4\, \delta^4(p + \overline{p} - l - q) \tag{6.5}$$

dove si riconosce il fattore di flusso $\frac{1}{2\widehat{s}}$, oltre ovviamente agli spazi delle fasi delle particelle di stato finale (bosone e gluone).

6.1.1 Spazio delle fasi

La δ di conservazione dei momenti $\delta^3(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{\overline{p}}-\overrightarrow{l}-\overrightarrow{q})$ permette di svolgere immediatamente l'integrazione in d^3q, producendo la condizione cinematica $\overrightarrow{p}+\overrightarrow{\overline{p}}=\overrightarrow{l}+\overrightarrow{q}$. La conservazione dell'energia $\delta(p_0+\overline{p}_0-l_0-q_0)$, invece, conviene che sia riscritta come segue

$$\frac{1}{2q_0}\delta(p_0+\overline{p}_0-l_0-q_0)=\delta((p_0+\overline{p}_0-l_0)^2-q_0^2)=\delta\left((p+\overline{p}-l)^2-Q^2\right) \tag{6.6}$$

dove la prima uguaglianza utilizza la ben nota proprietà della δ di Dirac

$$\delta(f(x))=\frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x-x_0) \tag{6.7}$$

(essendo x_0 la radice di $f(x)$) applicata in questo caso con $x={q_0}^3$, mentre la seconda uguaglianza segue dal mero formalismo dei quadrivettori. Definendo ora, come al solito, l'energia invariante partonica

$$\widehat{s}=(p+\overline{p})^2 \tag{6.8}$$

e ponendosi nel sistema del centro di massa delle particelle incidenti, in cui quindi $\overrightarrow{p}=-\overrightarrow{\overline{p}}$, si riscrive:

$$\delta\left((p+\overline{p}-l)^2-Q^2\right)=\delta\left(s-2\sqrt{\widehat{s}}l_0-Q^2\right) \tag{6.9}$$

Separiamo l'integrazione sullo spazio delle fasi del gluone nella componente trasversa e longitudinale: $d^3l=dl_{\|}d^2l_{\perp}$. Arriviamo allora a

$$d\widehat{\sigma}=\frac{1}{2\widehat{s}}\frac{dl_{\|}d^2l_{\perp}}{(2\pi)^3\,2l_0}\left|\overline{M}\right|^2(2\pi)\delta\left(\widehat{s}-Q^2-2\sqrt{s}l_0\right) \tag{6.10}$$

Questo completa, per ora, la manipolazione dei fattori cinematici.

6.1.2 Ampiezza di scattering

Passiamo al calcolo dell'ampiezza di scattering $\left|\overline{M}\right|^2$.

Consideriamo dapprima il diagramma di Feynman in cui il gluone è emesso dal quark (il cui momento è p):

[3] Poichè q_0 è una energia, solo la radice positiva ha senso.

$$M_q = N^i \frac{\not p - \not l}{(p-l)^2}(-igt^a_{ij})\gamma^\mu u^j(p)\varepsilon^*_\mu(l) \tag{6.11}$$

dove si è indicato con N tutto quanto attiene al processo di livello Born, "mutilato" però del propagatore del quark entrante, mentre g indica la costante di accoppiamento forte e t^a_{ij} è la matrice del gruppo di colore; i e j sono gli indici di colore applicati allo spinore del quark incidente e a quello del resto del processo Born.

Per non appesantire lo svolgimento del calcolo, scegliamo di dimenticarci temporaneamente del formalismo di colore: tralasciamo la matrice t^a_{ij} e gli indici di colore.

Ora, scegliamo di trascurare al numeratore il momento del gluone $\not l$ rispetto a $\not p$: questo è il contenuto dell'*approssimazione* iconale.

L'importante conseguenza dell'approssimazione è che si realizza a numeratore il prodotto $\not p\gamma^\mu u(p)$, rielaborabile secondo:

$$p_\nu\gamma^\nu\gamma^\mu u(p) = p_\nu\left(2g^{\nu\mu} - \gamma^\mu\gamma^\nu\right)u(p) = 2p^\mu u(p) \tag{6.12}$$

dove si è fatto uso dell'equazione di Dirac

$$\not p u(p) = 0 \tag{6.13}$$

Di conseguenza $u(p)$ si riunisce ad N, ricostruendo l'ampiezza di Born M_0.

Si ha allora

$$M_q = (-ig)M_0\frac{2p^\mu}{(p-l)^2}\varepsilon^*_\mu(l) = (ig)M_0\frac{p^\mu}{p\cdot l}\varepsilon^*_\mu(l) \tag{6.14}$$

Si vede allora che le approssimazioni fatte corrispondono ad assegnare al vertice di emissione del gluone soffice il fattore $(ig)\frac{p^\mu}{p\cdot l}$: fare direttamente così sarebbe un modo rapido di applicare l'approssimazione iconale.

Il contributo del diagramma in cui il gluone è emesso dall'antiquark si calcola in modo assolutamente simile, e si ottiene in totale:

$$M = M_q + M_{\overline{q}} = (ig)M_0\left[\frac{p^\mu}{p\cdot l} - \frac{\overline{p}^\mu}{\overline{p}\cdot l}\right]\varepsilon^*_\mu(l) \tag{6.15}$$

Di conseguenza l'ampiezza quadrata mediando sulle polarizzazioni delle particelle entranti e sulle polarizzazioni del gluone emesso è

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{pol.q\overline{q}}\sum_{pol.g}|M|^2 = \frac{1}{4}\sum_{pol.q\overline{q}} -g^2\left|M_0\right|^2\left[\frac{p}{p\cdot l} - \frac{\overline{p}}{\overline{p}\cdot l}\right]^2 \tag{6.16}$$

dove si è fatto uso di

$$\sum_{pol.g} \varepsilon_{\mu}^{*}(l)\varepsilon_{\nu}(l) = -g_{\mu\nu} \tag{6.17}$$

Ripristiniamo a questo punto il contributo dell'algebra di colore: si tratta di inserire un fattore $C_F = 4/3$.[4]

La somma sulle polarizzazioni dei fermioni ricostruisce l'usuale ampiezza di scattering di Born mediata:

$$\frac{1}{4}\sum_{pol.q\overline{q}} |M_0|^2 = \left|\overline{M_0}\right|^2 \tag{6.18}$$

Quindi

$$\left|\overline{M}\right|^2 = -C_F g^2 \left|\overline{M_0}\right|^2 \left(-\frac{2p\cdot\overline{p}}{(p\cdot l)\,(\overline{p}\cdot l)}\right) \tag{6.19}$$

Indicando con ϑ l'angolo di emissione del gluone (l'angolo tra $\overrightarrow{p}$ ed $\overrightarrow{l}$) si ottiene infine una forma molto trasparente[5]:

---

[4] Il fattore C_F può essere ottenuto anche dalle regole di Feynman di QCD per il colore (cfr. per esempio [46]). Si fa uso dell'importante relazione per le matrici di colore

$$\sum_a t^a_{ij} t^a_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

[5] A margine del calcolo dell'ampiezza di scattering appena svolto osserviamo le principali differenze che si avrebbero nel caso i partoni incidenti fossero massivi. In realtà non ha nessun senso considerare la collisione di partoni massivi: quello che invece sarebbe utile è il calcolo della ampiezza di scattering con due quark massivi uscenti, nell'ambito del processo di produzione di una coppia di quark pesanti considerato nel Capitolo 5. Poichè il calcolo dell'ampiezza di scattering in quel caso è del tutto speculare a quello presentato qui (infatti la determinazione dell'ampiezza di scattering non chiede di distinguere tra stato iniziale e stato finale) per economia ci appoggiamo a queste formule.
($\bullet$) Il passaggio in (6.14) fa uso dell'assunzione di massa nulla per i partoni incidenti. Se così non fosse, a denominatore si avrebbe il termine $m_q^2 - p\cdot l$, essendo m_q la massa a riposo del quark che irradia il gluone.
($\bullet$) Nel caso di quark massivi, $\left|\overline{M}\right|^2$ in (6.19) conterebbe anche i termini quadrati dello sviluppo del fattore [...]. Inoltre, ed è la cosa più importante, il denominatore del termine presentato nel testo sarebbe $\left(m_q^2 - p\cdot l\right)\left(m_q^2 - \overline{p}\cdot l\right)$.
($\bullet$) Nel caso di quark massivi, con le stesse convenzioni sull'angolo ϑ si ha a denominatore

$$\left|\overline{M}\right|^2 = C_F \left|\overline{M_0}\right|^2 \frac{4g^2}{\left|\overrightarrow{l}\right|^2 (1-\cos^2\vartheta)} = C_F \left|\overline{M_0}\right|^2 \frac{4g^2}{l_\perp^2} \tag{6.20}$$

6.1.3 Risultato

Inserendo la (6.20) nella (6.10) si ha per l'elemento di sezione d'urto

$$d\widehat{\sigma} = \frac{1}{2\widehat{s}} \frac{dl_\parallel d^2 l_\perp}{(2\pi)^3\, 2l_0} C_F \left|\overline{M_0}\right|^2 \frac{4g^2}{l_\perp^2}(2\pi)\delta\left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\widehat{s}}l_0\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \frac{dl_\parallel d^2 l_\perp}{(2\pi)^2\, l_0} \frac{4g^2}{4\pi} C_F \left|\overline{M_0}\right|^2 \frac{1}{l_\perp^2}\delta\left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\widehat{s}}l_0\right) \tag{6.21}$$

Definendo

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \tag{6.22}$$

abbiamo il risultato finale

$$d\widehat{\sigma} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \left|\overline{M_0}\right|^2 \left\{ C_F \frac{4\alpha_s}{(2\pi)^2} \frac{dl_\parallel}{l_0} \frac{d^2 l_\perp}{l_\perp^2} \right\} \delta\left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\widehat{s}}l_0\right) \tag{6.23}$$

(quanto racchiuso tra parentesi graffe è il contributo del singolo gluone emesso: la struttura della correzione è molto semplice proprio grazie alla approssimazione iconale).

6.2 Emissione di n gluoni

Consideriamo ora l'emissione di un numero arbitrario n di gluoni dalle particelle di stato iniziale. Grazie alla ripetuta applicazione della approssimazione iconale, si riuscirà ad ottenere una ampiezza di scattering totale fattorizzata. La linea che presentiamo segue la trattazione di Weinberg (cfr. per esempio [44]) per l'analisi dell'emissione di un numero arbitrario di *fotoni* (che a sua volta rivisita l'originale metodo di Bloch e Nordsieck). La dimostrazione

della (6.20) l'espressione $\left|\overrightarrow{l}\right|^2 (1 - \cos^2\vartheta + \frac{m_g^2}{p_0^2}\cos^2\vartheta)$. Questa espressione, contrariamente a quella del testo, non si annulla per alcun valore di ϑ.
Abbiamo pertanto mostrato che, nel caso di un gluone emesso da una particella di massa non nulla, la collinearità tra gluone e particella emettente non è possibile.

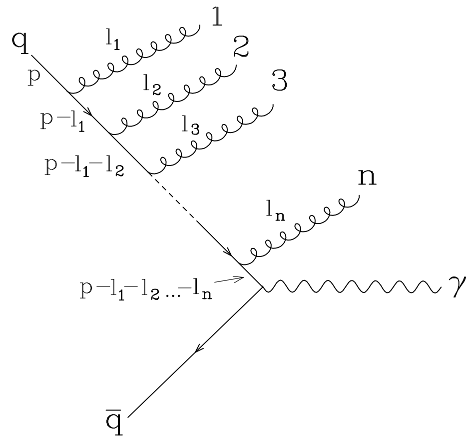


Figura 6.2: Annichilazione di quark e antiquark in un fotone con radiazione di n gluoni, da una stessa particella di stato iniziale

seguente è quindi valida nell'approssimazione "elettrodinamica", cioè trascurando i possibili vertici gluone-gluone. In approssimazione soffice, questo è lecito, almeno a livello di Leading Logarithms, e quindi la linea del discorso resta valida anche in QCD (cfr. la discussione in §3.2.3).

6.2.1 Ampiezza di scattering

Consideriamo dapprima il caso della emissione di n gluoni da parte di una sola particella di stato iniziale: il processo è rappresentato in fig.6.2. Facendo riferimento ad essa per quanto riguarda le notazioni cinematiche, si ottiene per l'ampiezza di Feynman[6]

$$M = N \frac{\not p - \not l_1 - \not l_2 \ldots - \not l_n}{(p - l_1 - l_2 \ldots - l_n)^2} (-ig)\gamma^{\mu_n} \frac{\not p - \not l_1 - \not l_2 \ldots - \not l_{n-1}}{(p - l_1 - l_2 \ldots - l_{n-1})^2} (-ig)\gamma^{\mu_{n-1}} \ldots$$
$$\ldots \frac{\not p - \not l_1}{(p - l_1)^2} (-ig)\gamma^{\mu_1} u(p) \cdot \varepsilon^*_{\mu_1}(l_1)\varepsilon^*_{\mu_2}(l_2) \ldots \varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \quad (6.24)$$

Come prima, N rappresenta l'ampiezza relativa al processo Born, mutilato del propagatore del fermione che irradia i gluoni. La struttura generale è quella di un prodotto di propagatori del fermione incidente, con momenti via via "degradati" dalla emissione dei gluoni.

[6]Come nel caso di una sola emissione, dimentichiamoci temporaneamente delle questioni relative al colore.

Adottare l'approssimazione iconale comporta, come nel caso di una singola emissione, il trascurare tutti i momenti l_i dei gluoni emessi rispetto a p nei numeratori. Si formano allora al numeratore n fattori del tutto analoghi a quello considerato in (6.12), che vanno rielaborati allo stesso modo, utilizzando ripetutamente l'equazione di Dirac. Il risultato è che la complicata struttura delle matrici di Dirac portate dai vertici di interazione viene semplificata e si può ricomporre l'ampiezza di Born unendo N e lo spinore del fermione originale $u(p)$:

$$M = (-ig)^n M_0 \frac{2p^{\mu_n}}{(p - l_1 - l_2 \ldots - l_n)^2} \cdots \frac{2p^{\mu_1}}{(p - l_1)^2} \cdot \varepsilon^*_{\mu_1}(l_1)\varepsilon^*_{\mu_2}(l_2)\ldots\varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \tag{6.25}$$

La fattorizzazione dell'ampiezza M è però ancora lontana, poichè nei denominatori figurano le somme dei momenti di tutti i gluoni emessi. Sviluppiamo i quadrati conservando solo i termini di primo ordine in l_i, ossia trascurando gli addendi del tipo $l_i \cdot l_j$. Quello che si ottiene è

$$M = (-ig)^n M_0 \frac{-p^{\mu_n}}{p \cdot (l_1 + l_2 \ldots + l_n)} \cdots \frac{-p^{\mu_1}}{p \cdot l_1} \cdot \varepsilon^*_{\mu_1}(l_1)\varepsilon^*_{\mu_2}(l_2)\ldots\varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \tag{6.26}$$

E' ora necessario sommare su tutte le possibili permutazioni dei momenti dei partoni emessi, dato che, ovviamente, nulla cambia nello stato finale se i gluoni sono emessi in un ordine diverso: ci sono quindi $n!$ diversi diagrammi da sommare, corrispondenti alle $n!$ permutazioni degli n momenti dei gluoni emessi. Denotiamo per chiarezza con π una di queste permutazioni: $\pi(i)$ è allora il valore tra 1 ed n a cui viene portato i (per esempio, se π è la permutazione che porta $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$, allora sarà $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$). Armati di questa notazione, possiamo dimostrare che vale la seguente identità:

$$\sum_{\text{tutte perm. } \pi} \left(\frac{1}{p \cdot (l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)} \ldots + l_{\pi(n)})} \cdots \frac{1}{p \cdot l_{\pi(1)}} \right) = \frac{1}{p \cdot l_n} \frac{1}{p \cdot l_{n-1}} \cdots \frac{1}{p \cdot l_1} \tag{6.27}$$

La dimostrazione procede per induzione su n. Per $n = 2$ è facile verificare che

$$\sum_{\text{tutte perm. } \pi} \left(\frac{1}{p \cdot (l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)})} \frac{1}{p \cdot l_{\pi(1)}} \right) = \\ = \frac{1}{p \cdot l_1} \frac{1}{p \cdot (l_1 + l_2)} + \frac{1}{p \cdot l_2} \frac{1}{p \cdot (l_2 + l_1)} = \frac{1}{p \cdot l_2} \frac{1}{p \cdot l_1} \tag{6.28}$$

Per il passo di induzione, si deve notare che il primo fattore nel membro sinistro della (6.27) è lo stesso per ogni permutazione, poichè contiene tutti gli $l_{\pi(i)}$. Si può allora raccoglierlo dalla somma in modo che il membro sinistro della (6.27) diventi

$$\sum_{\text{tutte perm. } \pi} \left(\frac{1}{p \cdot (l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)} \ldots + l_{\pi(n)})} \cdots \frac{1}{p \cdot l_{\pi(1)}} \right) = $$
$$= \frac{1}{p \cdot \sum l_{\pi(i)}} \sum_n \frac{1}{p \cdot (l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)} \ldots + l_{\pi(n-1)})} \cdots \frac{1}{p \cdot l_{\pi(1)}} \quad (6.29)$$

Per ogni permutazione π, ora, la quantità che rimane sotto sommatoria è indipendente da $l_{\pi(n)}$; fissiamo per esempio che sia $\pi(n) = i$, cioè l'n-esimo momento viene mandato nell'i-esimo: allora la quantità sotto sommatoria è di fatto indipendente da l_i. Di conseguenza può essere riscritta come somma su tutte le permutazioni che non coinvolgono i, che denotiamo con $\pi'(i)$, sommate poi a loro volta su tutte le possibili scelte di i; in formula:

$$\sum_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi'(i)} \quad (6.30)$$

Le permutazioni $\pi'(i)$ agiscono su $n-1$ interi, e questo è quello che servirà per compiere il passo di induzione. Il membro destro della (6.29) risulta

$$\frac{1}{p \cdot \sum l_{\pi(i)}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi'(i)} \frac{1}{p \cdot (l_{\pi(1)} + l_{\pi(2)} \ldots + l_{\pi(n-1)})} \cdots \frac{1}{p \cdot l_{\pi(1)}} = $$
$$= \frac{1}{p \cdot \sum l_{\pi(i)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p \cdot l_n} \cdots \frac{1}{p \cdot l_{i+1}} \frac{1}{p \cdot l_{i-1}} \cdots \frac{1}{p \cdot l_1} \quad (6.31)$$

avendo usato in questo punto l'ipotesi di induzione, ossia l'ipotesi che l'identità (6.27) sia vera per $n - 1$ momenti. Ora è sufficiente moltiplicare e dividere ognuno degli addendi della sommatoria presente in questa espressione per $p \cdot l_i$: i denominatori "si completano", cioe diventano tutti uguali e con la forma desiderata, precisamente quella del membro destro della (6.27); i numeratori si raccolgono e cancellano esattamente il fattore antistante la sommatoria.

La fatica fatta è compensata dal fatto che ora conosciamo il risultato della somma su tutte le permutazioni dei momenti dei gluoni emessi, che risulta tra l'altro avere una forma particolarmente semplice, con i vari momenti disaccoppiati tra loro. Si ha infatti:

$$M = (-ig)^n M_0 \frac{-p^{\mu_n}}{p \cdot l_n} \cdots \frac{-p^{\mu_1}}{p \cdot l_1} \cdot \varepsilon^*_{\mu_1}(l_1) \varepsilon^*_{\mu_2}(l_2) \ldots \varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \quad (6.32)$$

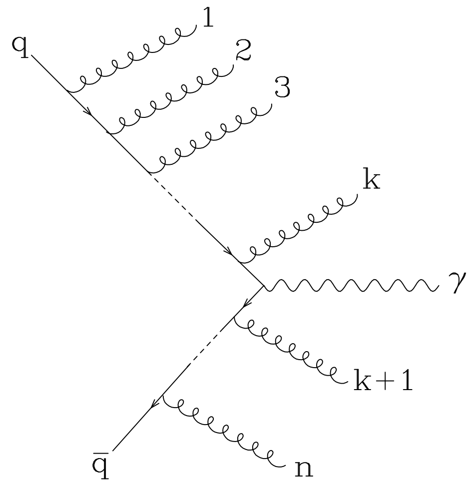


Figura 6.3: Annichilazione di quark e antiquark in un fotone con radiazione di n gluoni, non necessariamente da parte di una sola particella di stato iniziale

Si deve ora rilasciare l'assunzione semplificatoria che gli n gluoni siano emessi da una sola delle particelle incidenti. Consideriamo, ad esempio, che, degli n gluoni emessi, k provengano dal quark (di momento p) e i rimanenti $n-k$ dall'antiquark (di momento $\overline{p}$), come rappresentato in fig.6.3. L'approssimazione iconale e le stesse manipolazioni sui numeratori e sui denominatori descritte in precedenza portano allora ad una espressione per l'ampiezza di scattering pari a

$$\begin{aligned} M = (-ig)^n M_0 & \frac{+\overline{p}^{\mu_n}}{\overline{p}\cdot(l_{k+1}+\ldots+l_n)} \cdots \frac{+\overline{p}^{\mu_{k+1}}}{\overline{p}\cdot l_{k+1}} \cdot \\ & \cdot \frac{-p^{\mu_k}}{p\cdot(l_1+\ldots+l_k)} \cdots \frac{-p^{\mu_1}}{p\cdot l_1} \cdot \varepsilon^*_{\mu_1}(l_1)\varepsilon^*_{\mu_2}(l_2)\ldots\varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \end{aligned} \tag{6.33}$$

All'interno di ognuno dei due gruppi di emissioni si può ripetere esattamente il ragionamento che porta al disaccoppiamento dei momenti, arrivando a

$$M = (-ig)^n M_0 \frac{+\overline{p}^{\mu_n}}{\overline{p}\cdot l_n} \cdots \frac{+\overline{p}^{\mu_{k+1}}}{\overline{p}\cdot l_{k+1}} \cdot \frac{-p^{\mu_k}}{p\cdot l_k} \cdots \frac{-p^{\mu_1}}{p\cdot l_1} \cdot \varepsilon^*_{\mu_1}(l_1)\varepsilon^*_{\mu_2}(l_2)\ldots\varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \tag{6.34}$$

E' ora necessario sommare su tutte le possibili ripartizioni tra i due gruppi: fissiamo per semplicità le idee sul caso di emissione di soli tre gluoni: lo stato finale non è certo diverso nel caso che i gluoni 1 e 2 siano emessi dal quark e il gluone 3 dall'antiquark e nel caso che dal quark siano emessi i gluoni 1 e 3 e dall'antiquark il gluone 2. Lavorando con un piccolo numero di emissioni (piccolo n) non è difficile convincersi che la forma completa della ampiezza di scattering è allora la seguente

$$M = M_0(-ig)\left(\frac{\overline{p}^{\mu_n}}{\overline{p}\cdot l_n} - \frac{p^{\mu_n}}{p\cdot l_n}\right)\ldots\ldots(-ig)\left(\frac{\overline{p}^{\mu_1}}{\overline{p}\cdot l_1} - \frac{p^{\mu_1}}{p\cdot l_1}\right)\cdot \\ \cdot\,\varepsilon^*_{\mu_1}(l_1)\varepsilon^*_{\mu_2}(l_2)\ldots\varepsilon^*_{\mu_n}(l_n) \quad (6.35)$$

consistentemente con quello che ci si poteva aspettare ispirandosi a quanto trovato nel caso di una sola emissione.

A questo livello la fattorizzazione di tutti gli n contributi all'ampiezza è ormai raggiunta e formalmente evidente.

In modo del tutto analogo a quanto fatto per una sola emissione, passiamo alla ampiezza in modulo quadrato mediando sulla polarizzazione e sul colore delle particelle entranti, e sommando sulle polarizzazioni dei gluoni uscenti. Il risultato è[7]

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \left|\overline{M_0}\right|^2 C_F g^2\left(\frac{2p\cdot\overline{p}}{(p\cdot l_n)\,(\overline{p}\cdot l_n)}\right)\ldots\ldots C_F g^2\left(\frac{2p\cdot\overline{p}}{(p\cdot l_1)\,(\overline{p}\cdot l_1)}\right) \quad (6.36)$$

Passando ad usare come variabile i momenti trasversi dei gluoni emessi otteniamo il risultato finale per l'ampiezza di scattering con n emissioni indipendenti di gluoni:

$$\left|\overline{M}\right|^2 = \left|\overline{M_0}\right|^2 C_F\frac{4g^2}{l^2_{1\perp}}\ldots C_F\frac{4g^2}{l^2_{n\perp}} = \left|\overline{M_0}\right|^2\prod_{i=1}^{n} C_F\frac{4g^2}{l^2_{i\perp}} \quad (6.37)$$

6.2.2 Elemento di sezione d'urto

Per costruire l'elemento di sezione d'urto, l'ampiezza di scattering va ora moltiplicata per gli spazi delle fasi degli n gluoni e del bosone vettore, nonchè per il fattore di flusso (identico a quello del caso di una emissione, in quanto dipendente solo dallo stato iniziale); va invece divisa per $n!$, fattore dovuto alla indistinguibilità degli n gluoni identici prodotti; si ha:

[7]Reinseriamo a questo punto il fattore $C_F = 4/3$ dovuto all'algebra di colore.

$$d\widehat{\sigma} = \frac{1}{2\widehat{s}}\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{d^3 l_i}{(2\pi)^3\, 2l_{i0}}\right)\frac{d^3 q}{(2\pi)^3\, 2q_0}\left|\overline{M}\right|^2$$

$$(2\pi)^4\,\delta^4(p+\overline{p}-\sum_{i=1}^{n} l_i - q) =$$

$$= \frac{1}{2\widehat{s}}\left|\overline{M_0}\right|^2\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{d^3 l_i}{(2\pi)^3\, 2l_{i0}} C_F\frac{4g^2}{l_{i\perp}^2}\right\}\frac{d^3 q}{(2\pi)^3\, 2q_0}$$

$$(2\pi)^4\,\delta^4(p+\overline{p}-\sum_{i=1}^{n} l_i - q) \quad (6.38)$$

Manipolazioni sugli spazi delle fasi assolutamente identiche a quelle del caso di una emissione e la solita definizione di α_s (cfr. equ.(6.22)) portano allora a

$$d\widehat{\sigma} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}}\left|\overline{M_0}\right|^2\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left\{C_F\frac{dl_{i\|}d^2 l_{i\perp}}{(2\pi)^2\, l_{i0}}\frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2}\right\}\delta\left(\widehat{s}-Q^2-2\sqrt{\widehat{s}}\sum_{i=1}^{n} l_{i0}\right) \quad (6.39)$$

che rappresenta il risultato finale per l'elemento di sezione d'urto con n emissioni indipendenti.

6.2.3 Vincolo sulla somma dei momenti trasversi

Fino ad ora, quindi, i momenti trasversi dei gluoni emessi sono stati considerati liberi tra loro; il processo che stiamo analizzando prescrive invece che venga prodotto un bosone vettore di momento trasverso $q_\perp$, ossia che i vari $l_{i\perp}$ si sommino vettorialmente per dare $q_\perp$. La sezione d'urto partonica per produzione di bosone con momento trasverso $q_\perp$ si ottiene come somma di tutte le sezioni d'urto di emissione di un numero arbitrario di fotoni, tali che la somma vettoriale dei loro momenti trasversi sia $q_\perp$. In formula

$$\frac{d\widehat{\sigma}}{d^2 q_\perp} = \sum_{n=0}^{\infty}\int d^2 l_{1\perp}\dots d^2 l_{n\perp}\frac{d\widehat{\sigma}}{d^2 l_{1\perp}\dots d^2 l_{n\perp}}\delta\left(\overrightarrow{q_\perp}-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{l_{i\perp}}\right) \quad (6.40)$$

6.2.4 Risultato

Il risultato finale per la sezione d'urto partonica cercata $\frac{d}{d^2 q_\perp}\widehat{\sigma}(\widehat{s},Q^2)$ è allora

$$\frac{d\widehat{\sigma}}{d^2q_\perp} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \left|\overline{M_0}\right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \left\{ \int C_F \frac{dl_{i\|} d^2 l_{i\perp}}{(2\pi)^2 \, l_{i0}} \frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2} \right\}$$
$$\delta\left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\widehat{s}}\sum_{i=1}^{n} l_{i0}\right) \delta\left(\overrightarrow{q_\perp} - \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{l_{i\perp}}\right) \quad (6.41)$$

Analizziamo le proprietà di fattorizzazione della formula ottenuta: se, come previsto, l'ampiezza di scattering risulta fattorizzata nei contributi di ognuno degli n gluoni emessi, così non è per gli spazi delle fasi: la prima δ (che origina dalla conservazione dell'energia e dei momenti) costituisce un vincolo che lega tutti gli l_{i0}; la seconda δ (che nasce dalla conservazione vettoriale delle componenti trasverse) accoppia tra loro tutti gli $\overrightarrow{l_{i\perp}}$. L'effetto è che, a questo livello, non è ancora possibile separare tra loro gli apporti delle singole emissioni.

La tentazione potrebbe essere quella di "forzare" i vincoli di conservazione: ad esempio, appellandosi alla assunzione di emissioni soffici, si può pensare di trascurare tutti gli l_{i0} rispetto al resto delle energie in gioco; allo stesso modo, si può pensare di trascurare tutti i momenti trasversi $\overrightarrow{l_{i\perp}}$, eccetto al più uno di essi, rispetto al momento trasverso totale. Questo eliminerebbe i vincoli descritti sopra, e quindi aprirebbe la strada alla fattorizzazione completa.

E' però immediatamente evidente che entrambi questi ragionamenti non sono leciti nel regime in cui stiamo lavorando: essere alla soglia significa in particolare che $\widehat{s} - Q^2 \ll 1$ e quindi i due addendi nella prima delle δ sono confrontabili; essere nella regione di piccolo $q_\perp$ significa del resto che, nella seconda delle δ, il primo addendo non è per forza molto più importante di tutti gli altri. Questi concetti sono stati discussi ampiamente nei capitoli 3 e 4.

La procedura che si dimostra corretta è quella di attuare la trasformazione di Fourier rispetto a $q_\perp$ e di Mellin rispetto a τ.

6.3 Trasformazioni di Fourier e di Mellin

Nel paragrafo precedente abbiamo ricavato l'espressione completa per la distribuzione partonica. Ripartiamo allora dalla (6.4) in cui inseriamo il risultato di (6.41):

$$\frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \int d\widehat{\tau}dx_1dx_2x_1f(x_1)x_2f(x_2)\delta(x_1x_2\widehat{\tau}-\tau)\frac{d}{d^2q_\perp}\widehat{\sigma}(\widehat{s},Q^2) =$$
$$= \int d\widehat{\tau}dx_1dx_2f(x_1)f(x_2)\delta(x_1x_2\widehat{\tau}-\tau)\frac{2\pi}{2\widehat{s}}\left|\overline{M_0}\right|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}$$
$$\left\{\int C_F\frac{dl_{i\|}d^2l_{i\perp}}{(2\pi)^2\,l_{i0}}\frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2}\right\}\delta\left(\widehat{s}-Q^2-2\sqrt{\widehat{s}}\sum_{i=1}^{n}l_{i0}\right)\delta\left(\overrightarrow{q_\perp}-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{l_{i\perp}}\right) \quad (6.42)$$

Su questa quantità effettueremo le trasformazioni di Fourier e di Mellin in successione.

Per il processo di Drell-Yan l'ampiezza di scattering di ordine Born vale

$$\left|\overline{M_0}\right|^2 = q_f^2e^2\widehat{s} \quad (6.43)$$

essendo q_f il coefficiente frazionario della carica elettrica dei quark incidenti e e la carica elettrica dell'elettrone L'ottenimento di questa quantità è trattato per comodità in Appendice E.

6.3.1 Trasformazione di Fourier

La trasformazione di Fourier per funzioni di variabili vettoriali a due componenti, è definita come noto da

$$\widetilde{f}(\overrightarrow{k}) = \frac{1}{(2\pi)}\int d^2\overrightarrow{x}\ e^{-i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\ f(\overrightarrow{x}) \quad (6.44)$$

Trasformiamo allora in $\overrightarrow{q_\perp}$ secondo Fourier la distribuzione adronica (il membro sinistro della (6.42)): la trasformazione va ad agire solo sull'ultima δ, e l'integrazione esplicita è banale:

$$\frac{1}{(2\pi)}\int d^2\overrightarrow{q_\perp}\ e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\ \delta\left(\overrightarrow{q_\perp}-\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{l_{i\perp}}\right) = \frac{1}{(2\pi)}\prod_{i=1}^{n}e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{i\perp}}} \quad (6.45)$$

Si è in tal modo attuato il passaggio allo spazio del parametro di impatto $\overrightarrow{b}$. Quello che si è ottenuto è la fattorizzazione del vincolo sui momenti trasversi che era espresso dall'ultima delle δ.

Per ritornare allo spazio del momento trasverso della coppia $\overrightarrow{q_\perp}$ è necessario operare la trasformazione inversa di Fourier, definita come è noto da

$$f(\overrightarrow{x}) = \frac{1}{(2\pi)} \int d^2\overrightarrow{k}\ e^{i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{x}}\ \widetilde{f}(\overrightarrow{k}) \tag{6.46}$$

che quindi in questo caso si concretizza in

$$\frac{1}{(2\pi)} \int d^2\overrightarrow{b}\ e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\ \frac{1}{(2\pi)} \prod_{i=1}^{n} e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{i\perp}}} \tag{6.47}$$

Un modo equivalente (ma forse un po' più agile) di attuare la trasformazione diretta e inversa di Fourier in $\overrightarrow{q_\perp}$ è quello di esprimere la δ con la sua rappresentazione

$$\begin{aligned}\delta\left(\overrightarrow{q_\perp} - \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{l_{i\perp}}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b \exp\left[i\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{q_\perp} - \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{l_{i\perp}}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\ e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{1\perp}}}\dots e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{n\perp}}}\end{aligned} \tag{6.48}$$

I due percorsi sono ovviamente equivalenti.

Inserendo allora la (6.48) nella (6.42) si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \int d\widehat{\tau}dx_1dx_2x_1f(x_1)x_2f(x_2)\delta(x_1x_2\widehat{\tau}-\tau)\frac{2\pi}{2\widehat{s}}\left|\overline{M_0}\right|^2 \\ \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left\{\int C_F\frac{dl_{i\|}d^2l_{i\perp}}{(2\pi)^2\, l_{i0}}\frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2}e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{i\perp}}}\right\} \\ \delta\left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\widehat{s}}\sum_{i=1}^{n}l_{i0}\right)\end{aligned} \tag{6.49}$$

6.3.2 Trasformazione di Mellin

La trasformazione di Mellin su una funzione f della variabile x si definisce con (cfr. Appendice D)

$$F_N = \int_0^1 \frac{dx}{x}x^N f(x) \tag{6.50}$$

Attuiamo la trasformazione di Mellin rispetto alla variabile τ sulla distribuzione di momento trasverso a livello adronico (il membro sinistro della

(6.42)): come prima cosa si ottiene la fattorizzazione dell'espressione precedente nei momenti delle funzioni di struttura e della distribuzione di sezione d'urto partonica:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_N}{d^2q_\perp} &= \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}\tau^N \frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \\ &= \int_0^1 \frac{dx_1}{x_1}x_1^N x_1 f(x_1)\int_0^1 \frac{dx_2}{x_2}x_2^N x_2 f(x_2)\int_0^1 \frac{d\widehat{\tau}}{\widehat{\tau}}\widehat{\tau}^N \frac{d}{d^2q_\perp}\widehat{\sigma}(\widehat{s},Q^2) = \\ &= F_{1,N+1}F_{2,N+1}\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^2q_\perp} \end{aligned} \tag{6.51}$$

L'ultimo fattore (il momento della sezione d'urto partonica), viste le manipolazioni del paragrafo precedente (e usando la (6.43)) è esplicitamente

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^2q_\perp} = \int_0^1 \frac{d\widehat{\tau}}{\widehat{\tau}}\widehat{\tau}^N \pi q_f^2 e^2 \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\; e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} \\ \prod_{i=1}^{n}\left\{\int C_F \frac{dl_{i\|}d^2l_{i\perp}}{(2\pi)^2 l_{i0}}\frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2}e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_{i\perp}}}\right\}\delta\left(\widehat{s}-Q^2-2\sqrt{\widehat{s}}\sum_{i=1}^{n} l_{i0}\right)\end{aligned} \tag{6.52}$$

In questa forma, però, non è esposta la reale dipendenza dalla variabile $\widehat{\tau}$ rispetto a cui si deve eseguire l'integrazione. Per portarsi esplicitamente in termini della variabile $\widehat{\tau}$ si rielabora la δ arrivando a

$$\delta\left(\widehat{s}-Q^2-2\sqrt{\widehat{s}}\sum_{i=1}^{n} l_{i0}\right) \simeq \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)\delta\left(\widehat{\tau}-\left(1-2\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)\right) \tag{6.53}$$

Può essere utile seguire i numerosi passaggi di questa manipolazione per rendersi conto delle approssimazioni che sottende, nessuna delle quali, peraltro, è concettualmente molto rilevante. Per prima cosa esponiamo la dipendenza da $\widehat{\tau}$:

$$\delta\left(\widehat{s}-Q^2-2\sqrt{\widehat{s}}\sum l_{i0}\right) = \delta\left(\frac{Q^2}{\widehat{\tau}}(1-\widehat{\tau})-2\frac{Q}{\sqrt{\widehat{\tau}}}\sum l_{i0}\right) \tag{6.54}$$

Per risolvere la δ con l'utilizzo della solita proprietà della δ (cfr.(6.7)) ricaviamo gli zeri del suo argomento, uno solo dei quali ha senso fisico e risulta in

$$\sqrt{\widehat{\tau}} = \frac{-\sum l_{i0} \pm \sqrt{\left(\sum l_{i0}\right)^2 + Q^2}}{Q} \simeq 1 - \frac{\sum l_{i0}}{Q} \tag{6.55}$$

e quindi in

$$\widehat{\tau} = 1 - 2\frac{\sum l_{i0}}{Q} \tag{6.56}$$

In questi passaggi si è assunto, come lecito, $\frac{\sum l_{i0}}{Q} \ll 1$, in modo da poter sviluppare la radice quadrata secondo Taylor, e si è convenuto di trascurare termini di ordine superiore alla prima potenza di questo rapporto.

Usando le stesse armi si calcola e si manipola lo jacobiano (indicato con $|f'(x_0)|$ in (6.7)) e lo si valuta in corrispondenza della radice. In tal modo si ottiene la (6.53).

Inserendo la (6.53) nell'espressione per il momento della distribuzione a livello partonico arriviamo allora a

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^2q_\perp} = \int_0^1 d\widehat{\tau}\ \widehat{\tau}^{N-1} \frac{\pi q_f^2 e^2}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n}$$
$$\left\{ \int C_F \frac{dl_{i\parallel} d^2 l_{i\perp}}{(2\pi)^2\, l_{i0}} \frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_{i\perp}}} \right\} \left[\left(1 - \frac{\sum l_{i0}}{Q}\right) \delta\left(\widehat{\tau} - \left(1 - 2\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)\right)\right] \tag{6.57}$$

Analogamente al caso della trasformazione di Fourier attuata in precedenza, l'integrazione su $\widehat{\tau}$ è ora risolta banalmente dalla δ, in modo tale che si ha

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^2q_\perp} = \frac{\pi q_f^2 e^2}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \left\{ \int C_F \frac{dl_{i\parallel} d^2 l_{i\perp}}{(2\pi)^2\, l_{i0}} \frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_{i\perp}}} \right\}$$
$$\left[\left(1 - \frac{\sum l_{i0}}{Q}\right) \left(1 - 2\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)^{N-1} \right] \tag{6.58}$$

A rigore, andrebbero imposte condizioni sulla variabilità di $\widehat{\tau}$, che è limitato dagli estremi di integrazione. In particolare la condizione $\widehat{\tau} \geqslant 0$ genera il vincolo $\frac{\sum l_{i0}}{Q} \leqslant \frac{1}{2}$ (da esprimersi semai come $\Theta\left(\frac{1}{2} - \frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)$ nella formula precedente) che però è da ritenersi superfluo visto che vale l'assunzione ben più forte $\frac{\sum l_{i0}}{Q} \ll 1$.

Ora, il secondo termine del fattore racchiuso tra $[\dots]$ in (6.58) subisce le seguenti elaborazioni

$$\left(1 - 2\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)^{N-1} = \exp\left[(N-1)\ln\left(1 - 2\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right)\right] \simeq$$
$$\simeq \exp\left[-(N-1)\,2\frac{\sum l_{i0}}{Q}\right] = \prod_{i=1}^{n} e^{-(N-1)\frac{2}{Q}l_{i0}} \tag{6.59}$$

E' molto importante notare che si è solo assunto $2\frac{\sum l_{i0}}{Q} \ll 1$, che è ancora una approssimazione del tutto lecita nel regime in esame. Non stiamo cioè effettuando forzature sulla cinematica del processo, ma solo utilizzando proficuamente la condizione di emissione soffice. Allo stesso modo, e con la stessa assunzione, viene trattato il primo termine del fattore $[\dots]$:

$$\left(1 - \frac{\sum l_{i0}}{Q}\right) \simeq \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{1}{Q}l_{i0}} \tag{6.60}$$

In totale allora si ottiene dal termine $[\dots]$ un prodotto di fattori esponenziali

$$[\dots] \text{ in } (6.58) \simeq \prod_{i=1}^{n} e^{-(N-1/2)\frac{2}{Q}l_{i0}} \tag{6.61}$$

Questo è il punto cruciale della trasformazione di Mellin: abbiamo ottenuto la fattorizzazione del vincolo sugli l_{i0} espresso dalla rimanente delle δ presenti in (6.42):

Definiamo

$$N' = N - 1/2 \tag{6.62}$$

Siamo allora giunti a

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^2q_\perp} = \frac{\pi q_f^2 e^2}{Q^2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^{n}\left\{\int C_F\frac{dl_{i\parallel}d^2l_{i\perp}}{(2\pi)^2\,l_{i0}}\frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2}e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_{i\perp}}}e^{-N'\frac{2}{Q}l_{i0}}\right\} \tag{6.63}$$

Per tornare alla distribuzione di momento trasverso, che è la grandezza fisica cercata, è necessario compiere la trasformazione inversa di Mellin, in parallelo con quanto fatto per la trasformazione di Fourier.

La trasformata inversa del momento F_N è definita da (cfr. Appendice D)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN \; x^{-N} F_N \tag{6.64}$$

In questo caso allora anti-trasformiamo la quantità $\frac{d\sigma_N}{d^2 q_\perp}$ e abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d^2 q_\perp}\sigma(S,Q^2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN \; x^{-N} \; F_{1,N+1} F_{2,N+1} \frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^2 q_\perp} = \\ &= \frac{\pi q_f^2 e^2}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 b \; e^{i \vec{b} \cdot \vec{q_\perp}} \; \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN \; \tau^{-N} \; F_{1,N+1} F_{2,N+1} \\ &\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} \left\{ \int C_F \frac{dl_{i\parallel} d^2 l_{i\perp}}{(2\pi)^2 \, l_{i0}} \frac{4\alpha_s}{l_{i\perp}^2} e^{-i \vec{b} \cdot \vec{l_{i\perp}}} e^{-N' \frac{2}{Q} l_{i0}} \right\} \end{aligned} \tag{6.65}$$

Riassumiamo quanto fatto in questo paragrafo: abbiamo operato la trasformazione diretta di Fourier e di Mellin, con l'effetto di inserire le due variabili $\vec{b}$ ed N e ottenuto il grosso beneficio di fattorizzare i vincoli cinematici; per ritornare alla grandezza fisica rimangono da eseguire materialmente le trasformazioni inverse, i cui formalismi sono evidenti nella formula precedente.

6.3.3 Esponenziazione

Nella formula che chiude la sezione precedente è evidente la completa fattorizzazione dei contributi dei vari gluoni emessi: tutte le grandezze che attengono ad ogni singolo gluone i-esimo sono racchiuse nel termine $\{\dots\}$. Si può allora raccogliere la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} q^n = \exp q \tag{6.66}$$

giungendo a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d^2 q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \left|\overline{M_0}\right|^2 \frac{1}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 b \; e^{i \vec{b} \cdot \vec{q_\perp}} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN \; x^{-N} \; F_{1N} F_{2N} \; \mathbb{S}(Q,b,N) \end{aligned} \tag{6.67}$$

con

$$\mathbb{S}(Q,b,N) = \exp \left\{ \int C_F \frac{dl_\parallel d^2 l_\perp}{(2\pi)^2 \, l_0} \frac{4\alpha_s}{l_\perp^2} e^{-i \vec{b} \cdot \vec{l_\perp}} e^{-N' \frac{2}{Q} l_0} \right\} \tag{6.68}$$

avendo nuovamente raccolto l'ampiezza di scattering $\left|\overline{M_0}\right|^2$.

Nel seguito ci occuperemo di eseguire nell'esponente di $\mathbb{S}$ le integrazioni sui momenti dei gluoni irradiati.

6.4 Calcolo dell'esponente di Sudakov in Approssimazione di "Leading Logarithms"

Concentriamo l'attenzione sull'esponente del fattore di Sudakov nella formula appena ottenuta:

$$\ln \mathbb{S}(Q,b,N) = \int C_F \frac{dl_{\|} d^2 l_\perp}{(2\pi)^2\, l_0} \frac{4\alpha_s}{l_\perp^2} e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_\perp}} e^{-N' \frac{2}{Q} l_0} \tag{6.69}$$

Ricostruiamo per chiarezza l'origine di tutti gli elementi che lo costituiscono:

- lo spazio delle fasi per emissione di un gluone apporta il termine $\frac{dl_{\|} d^2 l_\perp}{(2\pi)^2 l_0}$; i limiti di integrazione sono uno degli aspetti più delicati del problema e verranno discussi approfonditamente;
- l'ampiezza di emissione di un gluone in approssimazione iconale ha dato origine al fattore $C_F \frac{4\alpha_s}{l_\perp^2}$;
- il formalismo della trasformazione di Fourier origina il fattore esponenziale $e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_\perp}}$, che proviene quindi dal vincolo sui momenti trasversi;
- il formalismo della trasformazione di Mellin origina il fattore esponenziale $e^{-N' \frac{2}{Q} l_0}$, che proviene quindi dal vincolo sulle energie dei fotoni.

Quello che vogliamo fare è l'integrazione sullo spazio delle fasi del gluone irradiato: le variabili di integrazione sono le tre componenti del vettore $\overrightarrow{l}$, ossia $l_{\|}$ ed $\overrightarrow{l_\perp}$.

Per prima cosa è conveniente passare ad usare come variabile di integrazione l_0 al posto di $l_{\|}$: essendo reale il gluone irradiato, vale come ovvio la condizione on-shell $l_0^2 - \left|\overrightarrow{l}\right|^2 = 0$, cioè $l_0^2 = l_{\|}^2 + l_\perp^2$. Allora si ha

$$\frac{dl_{\|}}{l_0} = 2\frac{dl_0}{l_{\|}} \tag{6.70}$$

Il fattore 2 nasce dal fatto che $l_{\|}$ è una variabile che assume valori positivi se il gluone è nella stessa direzione del quark che lo emette, negativi se in direzione opposta; invece l_0 è una variabile solo positiva: in sostanza dimenticare questo fattore significherebbe considerare solo i gluoni emessi in uno dei due emisferi dell'evento, quello corrispondente alla regione "frontale" rispetto ad uno dei due partoni di stato iniziale. Si noti che, invece, il fatto che le particelle irradianti siano due non è all'origine di questo fattore, ma è automaticamente incluso nel ragionamento che produce l'ampiezza.

Il cambio di variabile precedente è valido ricordando l'ovvia condizione cinematica

$$l_0 \geqslant l_\perp \left(= \left| \overrightarrow{l_\perp} \right| \right) \tag{6.71}$$

Passiamo allora a

$$\ln \mathbb{S}(Q, b, N) = \int 2C_F \frac{dl_0 d^2 l_\perp}{(2\pi)^2 \sqrt{l_0^2 - l_\perp^2}} \frac{4\alpha_s}{l_\perp^2} e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_\perp}} e^{-N' \frac{2}{Q} l_0} \Theta\left(l_0 - l_\perp\right) \tag{6.72}$$

La struttura è quella di una integrazione tridimensionale in l_0, $l_{\perp,x}$ $l_{\perp,y}$; nell'integranda le variabili non sono disaccoppiabili, ma l'andamento è grossomodo l'inverso di un quadrato sia nella direzione di l_0 che di $l_\perp$. Ci sono poi i fattori esponenziali, che sono per molti versi analoghi: si comportano sostanzialmente come termini smorzanti nella direzione di l_0 e di $l_\perp$ crescenti.

Un problema molto delicato è quello della scala di energia alla quale valutare la costante α_s: seguendo le indicazioni di [40] [41], assumiamo il valore di $l_\perp^2$; rimpiazziamo allora formalmente

$$\alpha_s \rightsquigarrow \alpha_s(l_\perp^2) \tag{6.73}$$

6.4.1 Integrazione su l_0

Cominciamo con lo svolgere l'integrazione sulla variabile l_0: l'approssimazione che facciamo è quella di trattare il termine esponenziale come un cutoff superiore, troncando l'integrazione quando l'esponenziale vale circa $1/e$, ossia in corrispondenza di

$$l_0 \lesssim \frac{Q}{2N'} \tag{6.74}$$

Fisicamente questo limite appare ben comprensibile se si pensa che "grandi N" corrisponde alla regione di soglia: l'energia a disposizione del gluone irradiato (su cui stiamo integrando) è tanto più piccola quanto più il processo si svolge in condizioni di soglia. In questo senso questo limite superiore è la ricaduta del vincolo sulla conservazione delle energie, come si vede bene tracciando all'indietro la sua origine. L'estremo inferiore di integrazione per l_0 è invece dato dalla Θ cinematica.

Per svolgere esplicitamente l'integrale si seguono allora i seguenti passaggi

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{S}(Q,b,N) &= \int 2C_F \frac{d^2 l_\perp}{(2\pi)^2} \frac{4\alpha_s(l_\perp^2)}{l_\perp^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_\perp}} \int_{l_\perp}^{\frac{Q}{2N'}} \frac{dl_0}{\sqrt{l_0^2 - l_\perp^2}} = \\
&= \int \frac{d^2 l_\perp}{(2\pi)^2} 2C_F \frac{4\alpha_s(l_\perp^2)}{l_\perp^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_\perp}} \left[\ln\left(l_0 + \sqrt{(l_0^2 - l_\perp^2)} \right) \right]_{l_\perp}^{\frac{Q}{2N'}} = \\
&= \int \frac{d^2 l_\perp}{(2\pi)^2} C_F \frac{4\alpha_s(l_\perp^2)}{l_\perp^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_\perp}} \left\{ \ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2 \frac{1}{l_\perp^2} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \ln\left[1 + \sqrt{1 - l_\perp^2 \left(\frac{2N'}{Q}\right)^2} \right]^2 \Theta\left(\frac{Q}{2N'} - l_\perp \right) \right\} \qquad (6.75)
\end{aligned}$$

L'ulteriore Θ nasce dal "garantire un range" all'integrazione su l_0 appena fatta: possiamo pensarla come la ricaduta su $l_\perp$ del limite dovuto all'essere nella regione di soglia.

6.4.2 Integrazione su $l_\perp$

Passiamo ora all'integrazione sulla variabile (vettore a due componenti) $\vec{l_\perp}$: tutta l'integranda è in realtà funzione del modulo $l_\perp$, eccetto l'esponente del fattore smorzante: passiamo alle variabili polari $l_\perp$ e ϑ ($\vartheta \in (0, 2\pi)$), svolgendo l'integrazione angolare in modo immediato:

$$d^2 l_\perp = l_\perp dl_\perp d\Omega = \frac{1}{2} dl_\perp^2 d\Omega \qquad (6.76)$$

$$\int d\Omega e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_\perp}} = \int_0^{2\pi} d\vartheta e^{-ibl_\perp \cos\vartheta} = 2\pi \mathbf{J}_0(l_\perp b) \qquad (6.77)$$

dove $\mathbf{J}_0(z)$ è la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero (cfr. nota 14 nel Capitolo 3). ($\mathbf{J}_0(x)$ è rappresentata in fig.6.4)

Approssimiamo questa funzione con un cutoff superiore per l'intervallo di integrazione di $l_\perp$ posto a valori dell'ordine di

$$l_\perp \lesssim \frac{1}{b} \qquad (6.78)$$

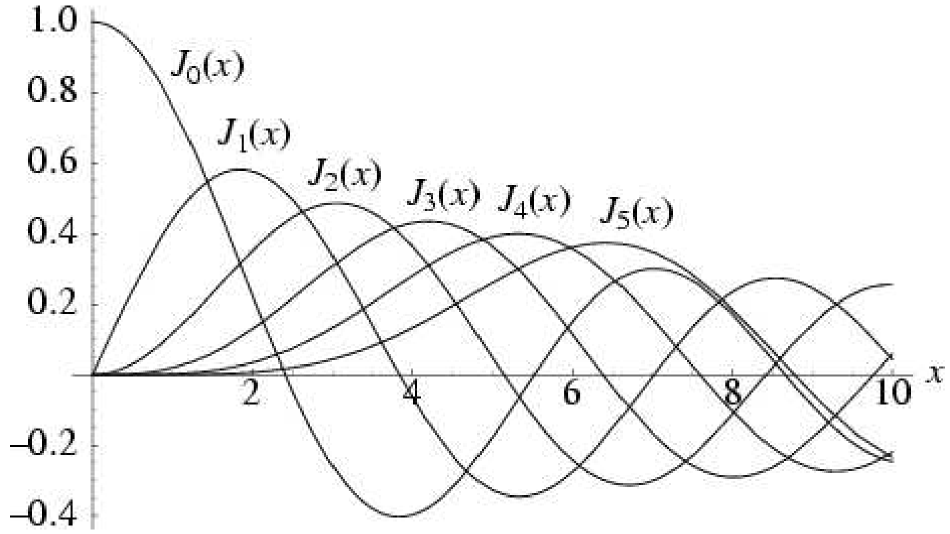


Figura 6.4: Le funzioni di Bessel di prima specie di ordine più basso

Infatti la funzione di Bessel comincia a oscillare rapidamente attorno a zero dopo il primo annullamento e quindi intervengono forti cancellazioni nella integrazione oltre questo limite.

L'interpretazione fisica di questo limite è in forte analogia con quella fornita per il cutoff su l_0: in questo caso il momento trasverso del gluone emesso (su cui stiamo svolgendo la presente integrazione) appare tanto più limitato quanto più grande è b, ossia quanto più siamo nella regione dei piccoli $q_\perp$; questo limite superiore è l'espressione approssimata, a questo livello, del vincolo sui momenti trasversi dei gluoni emessi.

L'integrazione su $l_\perp^2$ è allora imbrigliata da due diversi cutoff superiori: quello appena discusso e quello espresso da $\Theta\left(\frac{Q}{2N'} - l_\perp\right)$: definiamo quindi la grandezza

$$X^2 = \min\left\{\frac{1}{b^2}; \frac{Q^2}{4N'^2}\right\} \tag{6.79}$$

Essa rappresenta il limite superiore al range di integrazione di $l_\perp^2$: incorpora entrambi i limiti dovuti all'essere ai confini dello spazio delle fasi. A seconda del valore dei parametri b ed N uno dei due termini si impone sull'altro.

A margine, consideriamo il secondo addendo logaritmico nell'integranda in (6.75): decidiamo di trascurarlo rispetto al primo addendo logaritmico.

Questo corrisponde a limitarsi ai Leading Logarithms, cosa che si può vedere nel modo seguente. Ricordiamo innanzitutto che l'assegnazione di un termine alla categoria dei "Leading Logarithms", o dei "Next to Leading Logarithms" e così via, è applicabile ai logaritmi delle variabili b ed N, come discusso nei capitoli 3 e 4; è necessario, cioè, valutare "il frutto" del termine in questione alla fine del processo di integrazione. Immaginiamo allora di compiere l'integrazione su $l_\perp^2$, ma, per semplificare le cose, consideriamo temporaneamente α_s fissata. Avendo posto a X^2 il limite superiore per $l_\perp^2$, a maggior ragione si ha che, al massimo, $l_\perp^2 \in \left(0; \frac{1}{N'^2}\right)$; di conseguenza $\ln\left[1+\sqrt{1-l_\perp^2\left(\frac{2N'}{Q}\right)^2}\right]^2 \in (0; \ln 2)$, cioè un fattore numerico, finito. L'integrazione su $l_\perp^2$, per quanto riguarda questo addendo, si riduce allora a quella di $1/l_\perp^2$ moltiplicato per un fattore numerico: il risultato è un termine proporzionale a $\alpha_s \ln X^2$; a seconda del valore assunto da X^2 si tratta quindi di un termine di tipo $\alpha_s \ln b^2$ o di $\alpha_s \ln N^2$, che sono evidentemente di ordine NLL.

Consideriamo, invece, l'estremo inferiore di integrazione per $l_\perp^2$, che dà origine ad una divergenza di tipo logaritmico: si tratta dell'atteso manifestarsi delle divergenze infrarosse (soffici e collineari) per l'emissione di gluoni da stato iniziale. Scegliamo di regolarizzarle, per esempio, con l'introduzione di un cutoff infrarosso λ^2, molto più piccolo, per definizione, di tutte le grandezze in gioco.

Si arriva allora a

$$\ln \mathbb{S}(Q,b,N) = \frac{C_F}{\pi}\int_{\lambda^2}^{X^2}\frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2}\alpha_s(l_\perp^2)\ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2\frac{1}{l_\perp^2}\right] \tag{6.80}$$

L'inclusione dei gluoni virtuali porta all'integrale (orientato)

$$\ln \mathbb{S}(Q,b,N) = \frac{C_F}{\pi}\int_{\mu^2}^{X^2}\frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2}\alpha_s(l_\perp^2)\ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2\frac{1}{l_\perp^2}\right] \tag{6.81}$$

dove μ è la scala che andrà fissata ad una energia caratteristica del processo. Il passaggio appena fatto sottointende in realtà tutta la procedura della regolarizzazione, della cancellazione delle divergenze soffici tra contributo reale e virtuale, del riassorbimento delle divergenze collineari nelle funzioni di struttura e infine del passaggio allo schema di rinormalizzazione $\overline{MS}$; per non appesantire ulteriormente la linea di questa trattazione si è scelto qui di passare direttamente al risultato di questa importante routine. In Appendice E è invece riportata per esteso nel caso di una singola emissione.

A latere, si osservi che, nell'ipotesi di fissare $\mu \sim Q$, come dovrà essere, si ha $X^2 \leqslant \mu^2$, quindi in questa ultima formula gli estremi di integrazione sono in realtà formalmente invertiti.

La dipendenza di α_s da $l_\perp^2$ va esplicitata per poter compiere esplicitamente l'integrazione: approssimando al primo ordine la equazione del gruppo di rinormalizzazione per la costante di accoppiamento (cfr. Appendice B) si ha

$$\alpha_s(l_\perp^2) = \frac{1}{b_0 \ln \frac{l_\perp^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \tag{6.82}$$

Limitarsi al primo ordine dello sviluppo corrisponde ad una accuratezza di livello LLA; tenere anche il secondo comporta spingersi a NLL; un calcolo di questo tipo, accurato fino al livello NLL, si può trovare in [22], nel caso della sezione d'urto alla soglia.

Arriviamo allora finalmente al punto di dover compiere l'integrazione su $l_\perp^2$, cosa che si può ora fare facilmente secondo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned}
\ln \mathbb{S}(Q,b,N) = \frac{C_F}{\pi} \int_{\mu^2}^{X^2} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2} \frac{1}{b_0 \ln \frac{l_\perp^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \ln \left[\left(\frac{Q}{2N'} \right)^2 \frac{1}{l_\perp^2} \right] = \\
= \frac{C_F}{\pi b_0} \int_{\mu^2}^{X^2} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2} \frac{1}{\ln \frac{l_\perp^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \left(\ln \frac{Q^2}{4N'^2 \Lambda_{QCD}^2} - \ln \frac{l_\perp^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right) = \\
= \frac{C_F}{\pi b_0} \int_{\ln \mu^2}^{\ln X^2} d(\ln l_\perp^2) \left[\frac{\ln \frac{Q^2}{4N'^2 \Lambda_{QCD}^2}}{\ln \frac{l_\perp^2}{\Lambda_{QCD}^2}} - 1 \right] = \\
= \frac{C_F}{\pi b_0} \left[\ln \frac{Q^2}{4N'^2 \Lambda_{QCD}^2} \ln \left(\frac{\ln \frac{X^2}{\Lambda_{QCD}^2}}{\ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \right) - \ln \frac{X^2}{\mu^2} \right] = \\
= \frac{C_F}{\pi b_0} \left[\left(\ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2} + \ln \frac{Q^2}{4N'^2 \mu^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\ln \frac{X^2}{\mu^2}}{\ln \frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \right) - \ln \frac{X^2}{\mu^2} \right]
\end{aligned} \tag{6.83}$$

dove l'ultimo passaggio è solo un riassestamento dei termini.

6.4.3 Formula finale

La formula appena ricavata rappresenta il nostro risultato finale, che quindi riassumiamo per completezza. Si tratta di riscrivere l'equazione (6.67) con l'espressione appena calcolata per il fattore di Sudakov. Inoltre raccogliamo la sezione d'urto totale di Born $\sigma_0(S)$ (cfr. Appendice C). Inoltre ancora, per raggiungere un risultato completo, implementiamo a questo punto la somma su tutti i sapori f di quark/antiquark che si annichilano, pesati dai rispettivi coefficienti frazionari di carica elettrica q_f.[8]

Abbiamo ricavato per la distribuzione di momento trasverso a livello adronico, in LLA:

$$\frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \sigma_0(S)\frac{S}{Q^2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}\cdot \\ \cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN\ \tau^{-N}\ \sum_f q_f^2 F_{1,N+1}^f F_{2,N+1}^{\overline{f}}\ \mathbb{S}(Q,b,N) \tag{6.84}$$

con

$$\mathbb{S}(Q,b,N) = \exp\left\{\frac{C_F}{\pi b_0}\left[\left(\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2} + \ln\frac{Q^2}{4\,(N-1/2)^2\,\mu^2}\right)\cdot \right.\right. \\ \left.\left. \cdot\ln\left(1+\frac{\ln\frac{X^2}{\mu^2}}{\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}}\right) - \ln\frac{X^2}{\mu^2}\right]\right\} \tag{6.85}$$

essendo

$$X^2 = \min\left\{\frac{1}{b^2};\frac{Q^2}{4\,(N-1/2)^2}\right\} \tag{6.86}$$

Nel limite di soglia (limite di grandi N) è ininfluente sostituire $N-1/2$ con N.

6.5 Limiti di validità

Fino ad ora si è sottaciuto il problema dei limiti di validità della formula ottenuta, in relazione soprattutto al raggiungimento della regione non perturbativa.

Per come è scritto, infatti, il fattore (6.81) non è ben definito: l'argomento $l_\perp^2$ della costante di accoppiamento $\alpha_s(l_\perp^2)$ non può scendere fino alla scala Λ_{QCD}^2, pena la divergenza della costante stessa. L'estremo superiore di integrazione X^2, di conseguenza, non può essere lasciato libero di assumere valori

[8]La sezione d'urto totale Born si intende relativa alla annichilazione di particelle di carica elettrica e.

arbitrariamente piccoli. L'importante condizione da imporre per rimanere al di sopra della regione non perturbativa (del polo di Landau) è quindi

$$X^2 \geqslant \Lambda_{QCD}^2 \tag{6.87}$$

In particolare, vista la definizione (6.79) di X^2, questa implica che valgano a maggior ragione le condizioni

$$b^2 \leqslant \frac{1}{\Lambda_{QCD}^2} \tag{6.88}$$

$$N^2 \leqslant \frac{1}{4}\frac{Q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \tag{6.89}$$

Ritroviamo quindi le condizioni imposte alle formule di Parisi e Petronzio (3.23) e di Catani e Trentadue (4.15) rispettivamente nel caso della distribuzione a basso momento trasverso lontano dalla soglia e nel caso della sezione d'urto totale alla soglia. Si potrebbe dire che, nel caso della nostra formula, bisogna tutelarsi dalla caduta nella regione non trattabile perturbativamente in due diverse direzioni, come ci si può aspettare dall'aver attuato l'intersezione dei due regimi-limite. La condizione (6.87) incorpora entrambi i limiti[9].

6.6 Controllo del risultato nel limite lontano dalla soglia

Consideriamo la restrizione della nostra formula finale (6.84)/(6.85) al caso in cui non ci si trovi nel regime di soglia: dato che la regione di soglia corrisponde a $N \to \infty$, questo significa fissare invece N ad un valore sufficientemente basso (solo nell'esponente di Sudakov!). Poniamo ad esempio $N = 1$. In questo caso

$$X^2 = \min\left\{\frac{1}{b^2}; Q^2\right\} \equiv \frac{1}{b^2} \tag{6.90}$$

avendo utilizzato anche la condizione $b^2 \gtrsim \frac{1}{Q^2}$, che denota la regione di risommazione.

[9] A latere si osservi che, senza la condizione in (6.87), non è ben definito nell'esponente di Sudakov della formula finale (6.85) il termine logaritmico contenente logaritmi come argomento.

Fissiamo inoltre $\mu \simeq Q$. Il fattore di Sudakov in (6.85) si riduce a

$$\mathbb{S}(Q,b,N) = \mathbb{S}(Q,b) = \exp\left\{ \frac{C_F}{\pi b_0} \left[\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}} \ln \left(\frac{\ln \frac{1}{b^2 \Lambda^2_{QCD}}}{\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}} \right) + \ln b^2 Q^2 \right] \right\} \tag{6.91}$$

che è precisamente la forma prevista dalla trattazione LLA di Parisi e Petronzio (cfr.(3.22)) per il fattore di Sudakov, oppure, che è lo stesso, dalla trattazione di Collins, Soper e Sterman (cfr.(3.25)) limitatamente al caso LLA.

6.7 Controllo del risultato integrato nel momento trasverso

Ricaviamo ora dalla nostra formula finale la sezione d'urto totale (integrata quindi su tutti i momenti trasversi $\overrightarrow{q_\perp}$ della coppia) nel regime di soglia. L'integrazione su tutti i $\overrightarrow{q_\perp}$ corrisponde a fissare $\overrightarrow{b} = 0$, infatti schematicamente possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\sigma(\tau) &= \int d^2q_\perp \frac{d\sigma}{d^2q_\perp} = \int d^2q_\perp \int d^2b \; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}} \; f(\overrightarrow{b}) = \\ &= \int d^2b \; f(\overrightarrow{b}) \int d^2q_\perp \; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}} = \int d^2b \; f(\overrightarrow{b}) \; \delta(\overrightarrow{b}) = f(\overrightarrow{b})\Big|_{\overrightarrow{b}=0}\end{aligned} \tag{6.92}$$

dove $f(\overrightarrow{b})$ rappresenta tutta la lunga l'espressione che in (6.84)/(6.85) è sottoposta alla trasformazione inversa secondo Fourier.

In questo caso

$$X^2 = \min\left\{ \frac{1}{b^2}; \frac{Q^2}{4\left(N-1/2\right)^2} \right\} \equiv \frac{Q^2}{4\left(N-1/2\right)^2} \simeq \frac{Q^2}{4N^2} \tag{6.93}$$

Fissiamo inoltre $\mu \simeq Q/2$. Il fattore di Sudakov in (6.85) si riduce a

$$\begin{aligned}&\mathbb{S}(Q,b,N) = \mathbb{S}(Q,N) = \\ &= \exp\left\{ \frac{C_F}{\pi b_0} \left[\left(\ln \frac{Q^2/4}{\Lambda^2_{QCD}} - \ln N^2 \right) \ln \left(1 - \frac{\ln N^2}{\ln \frac{Q^2/4}{\Lambda^2_{QCD}}} \right) + \ln N^2 \right] \right\}\end{aligned} \tag{6.94}$$

Per uniformare le notazioni con quelle della trattazione di Catani e Trentadue presentata in §4.2 conviene ritornare ad $\alpha_s(\mu^2) = \alpha_s(Q^2/4) = \left(b_0 \ln \frac{Q^2/4}{\Lambda^2_{QCD}}\right)^{-1}$ che indichiamo per brevità con α_s:

$$\mathbb{S}(Q,N) = \exp\left\{\frac{C_F}{\pi b_0}\left[\left(\frac{1}{b_0\alpha_s} - 2\ln N\right)\ln\left(1 - 2b_0\alpha_s \ln N\right) + 2\ln N\right]\right\} \tag{6.95}$$

Denotiamo allora $\lambda = b_0\alpha_s \ln N$ e arriviamo a

$$\mathbb{S}(Q,N) = \exp\left\{\frac{C_F}{\pi b_0}\frac{\ln N}{\lambda}\left[(1-2\lambda)\ln(1-2\lambda) + 2\lambda\right]\right\} \tag{6.96}$$

che è precisamente la forma prevista da Catani e Trentadue per il fattore di Sudakov in LLA (cfr. le equazioni (4.17) e (4.18a)).

6.8 Riottenimento della formula esatta al "Next to Leading Order"

Ci proponiamo anche di dedurre dalla formula (6.84)/(6.85) risommata l'espressione NLO dell'esponente di Sudakov, accurata quindi entro l'ordine α_s.

Ricostruiamo l'espressione al primo ordine della costante di accoppiamento $\alpha_s(\mu^2) = \left(b_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}}\right)^{-1}$ e sviluppiamo nell'esponente di Sudakov (6.85) i logaritmi. Otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{S}(Q,b,N) &= \exp\left\{\frac{C_F}{\pi b_0}\left[\left(\frac{1}{b_0\alpha_s(\mu^2)} - \ln\frac{4N'^2\mu^2}{Q^2}\right)\cdot\right.\right.\\ &\quad \left.\left.\cdot\ln\left(1 + b_0\alpha_s(\mu^2)\ln\frac{X^2}{\mu^2}\right) - \ln\frac{X^2}{\mu^2}\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{\frac{C_F}{\pi}\alpha_s(\mu^2)\left[-\frac{1}{2}\ln^2\frac{X^2}{\mu^2} - \ln\frac{4N'^2\mu^2}{Q^2}\ln\frac{X^2}{\mu^2}\right]\right\}\end{aligned} \tag{6.97}$$

Al primo ordine in α_s, quindi, il fattore di Sudakov diventa

$$\mathbb{S}(Q,b,N) \simeq 1 + C_F\frac{\alpha_s(\mu^2)}{2\pi}\left[-\ln^2\frac{X^2}{\mu^2} - 2\ln\frac{4N'^2\mu^2}{Q^2}\ln\frac{X^2}{\mu^2}\right] \tag{6.98}$$

Questa espressione collima con i termini di livello LLA di quella calcolata in NLO in regolarizzazione dimensionale in Appendice E.

Capitolo 7

Stime numeriche

In questo capitolo ci occupiamo di ottenere alcune stime quantitative della formula (6.84)/(6.85) per la distribuzione di momento trasverso, in condizioni di soglia.

E' importante sottolineare che si tratta solo di stime, volte soprattutto a mettere in luce le caratteristiche basilari del nostro risultato. Ad esempio, la forma esplicita che adotteremo per le pdf's è del tutto di convenienza; inoltre attueremo una serie di semplificazioni con l'intento di rendere più chiari i risultati.

L'obiettivo di questo lavoro numerico è quello di evidenziare quali siano gli effetti sulle distribuzioni di momento trasverso delle correzioni di soglia che sono incluse nella nostra trattazione. In particolare portiamo avanti il confronto tra il nostro risultato conclusivo completo per la distribuzione di momento trasverso alla soglia e l'espressione che si ottiene da quello stesso risultato avendo fissato nell'esponente di Sudakov valore piccolo per N; come evidenziato in §6.6, questo corrisponde a trascurare gli effetti della vicinanza alla soglia. Vedremo che, già a piccoli τ, non sono trascurabili le differenze tra le due previsioni.

Il nostro risultato conclusivo è ottenuto in §6.4.3 e viene qui ripetuto per comodità:

$$\frac{d}{d^2q_\perp}\sigma(S,Q^2) = \sigma_0(S)\frac{S}{Q^2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{i\,\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN\ \tau^{-N}\ \sum_f q_f^2 F^{f}_{1,N+1}F^{\overline{f}}_{2,N+1}\ \mathbb{S}(Q,b,N) \tag{6.84}$$

$$\mathbb{S}(Q,b,N) = \exp\left\{ \frac{C_F}{\pi b_0} \left[\left(\ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}} + \ln \frac{Q^2}{4\,(N-1/2)^2\,\mu^2} \right) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \ln \left(1 + \frac{\ln \frac{X^2}{\mu^2}}{\ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{QCD}}} \right) - \ln \frac{X^2}{\mu^2} \right] \right\} \tag{6.85}$$

$$X^2 = \min\left\{ \frac{1}{b^2}; \frac{Q^2}{4\,(N-1/2)^2} \right\} \tag{6.86}$$

Per ottenere previsioni numeriche da questa formula, è necessario compiere le trasformazioni inverse di Mellin e di Fourier. Per la complicatezza dell'integranda, sia come funzione di N che di b, le integrazioni esatte appaiono difficili; abbiamo quindi scelto di calcolare numericamente gli integrali necessari.

Nel seguito ci occupiamo allora preliminarmente di:

- scegliere una forma conveniente per le funzioni di struttura F_N;
- operare una scelta per la scala di fattorizzazione μ;
- sostituire con una forma algebrica, con appropriate proprietà di analiticità in N, l'espressione della quantità X^2.

Inoltre da ora in poi semplifichiamo la notazione del problema limitandoci a considerare un solo sapore di quark incidenti, supposti per di più di carica unitaria: scompare quindi nella formula (6.84) la sommatoria sui sapori f e il coefficiente frazionario q_f.

Fatte e discusse queste scelte, passiamo ad approfondire brevemente i problemi relativi alla trasformazione inversa di Mellin e di Fourier, in particolare riguardo al trattamento della regione non perturbativa.

Elenchiamo quindi le precise scelte fatte per i parametri presenti nella funzione (ad esempio Q^2 o Λ_{QCD}) o introdotti ex novo nei punti precedenti (ad esempio le variabili che parametrizzano la regione non perturbativa).

Infine presentiamo e discutiamo i risultati numerici.

In Appendice F sono riportati i listati dei programmi in Fortran utilizzati per svolgere le integrazioni.

7.1 Discussione preliminare

7.1.1 Scelta delle funzioni di struttura

Seguendo per esempio [23], agli scopi di questa discussione quantitativa assumiamo per le funzioni di struttura nello spazio degli N la seguente forma

$$F_{i,N} = \frac{6}{N(N+1)(N+2)} \tag{7.1}$$

Questa corrisponde all'espressione nello spazio delle x_i

$$f(x_i) = 3(1-x_i)^2 \tag{7.2}$$

(il fattore 3 rende normalizzato a 1 l'integrale $\int_0^1 dx\ f(x)$).

7.1.2 Scelta della scala di fattorizzazione

Nella (6.84) compare la scala arbitraria di fattorizzazione μ^2 (con le dimensioni di una scala di energia). E' noto (cfr. per esempio anche §2.2) che essa va fissata ad un valore non troppo diverso dall'energia caratteristica del processo Q^2. Comunemente la preferenza cade sulle scelte $\mu = 2Q$, $\mu = Q$, $\mu = Q/2$.

Nel nostro caso considereremo i valori

$$\mu = Q \tag{7.3a}$$
$$\mu = Q/2 \tag{7.3b}$$

7.1.3 Forme approssimate per il minimo

Per approssimare la grandezza

$$X^2 = \min\left\{\frac{1}{b^2}; \frac{Q^2}{4\,(N-1/2)^2}\right\} \tag{7.4}$$

con una espressione algebrica che sia analitica nel semipiano $\mathrm{Re}\,N > 0$, sono ovviamente possibili in linea di principio molte alternative. Nel seguito ci limiteremo a due di esse.

Una possibile approssimazione è costituita da

$$\min\left\{A^2, B^2\right\} \simeq \frac{1}{\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}} \tag{7.5}$$

E' chiaro che nel caso di $A \ll B$ (o viceversa $B \ll A$) l'espressione approssimata ha il denominatore dominato dal primo addendo e quindi si riduce a A^2 (o viceversa a B^2), e pertanto riproduce il concetto di minimo. Nel nostro caso si ha[1]

$$\text{minimo di tipo 1 (`min.1'):} \quad X^2 = \frac{1}{b^2 + \frac{4N^2}{Q^2}} \tag{7.6}$$

Un'altra possibile approssimazione è costituita da

$$\min\left\{A^2, B^2\right\} \simeq \frac{1}{\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)^2} \tag{7.7}$$

E' facile vedere come prima che si tratta di una approssimazione che riproduce il concetto di minimo. Nel nostro caso si concretizza in

$$\text{minimo di tipo 2 (`min.2'):} \quad X^2 = \frac{1}{\left(b + \frac{2N}{Q}\right)^2} \tag{7.8}$$

7.1.4 Trasformazione inversa di Mellin

La trasformazione inversa di Mellin, secondo la definizione in Appendice D e come indicato esplicitamente nella formula (6.84), comporta l'estensione al piano di N complesso della funzione da invertire e l'integrazione lungo un asse in direzione immaginaria ("verticale") che interseca l'asse reale in corrispondenza della coordinata C.

L'estensione al piano complesso di una funzione come quella con cui abbiamo a che fare comporta l'analisi delle singolarità che la caratterizzano. Qui seguiremo le indicazioni della "Minimal Prescription" enunciata in [23], che prescrive di posizionare l'asse di integrazione in modo che tutte le singolarità dell'integranda siano alla sinistra di questo asse, eccetto il polo di Landau che giace alla estrema destra.

Analizziamo dunque i punti singolari della funzione integranda.

Le *funzioni di struttura* F_{N+1} producono dei poli in corispondenza di

$$N = -1 \qquad N = -2 \qquad N = -3 \tag{7.9}$$

Si tratta quindi di punti sull'asse reale negativo.

[1]Da ora in poi semplifichiamo la notazione sostituendo N ad $N-1/2$; nel limite di grandi N, cioè di regime di soglia, come quello in cui stiamo lavorando, questa semplificazione è ininfluente.

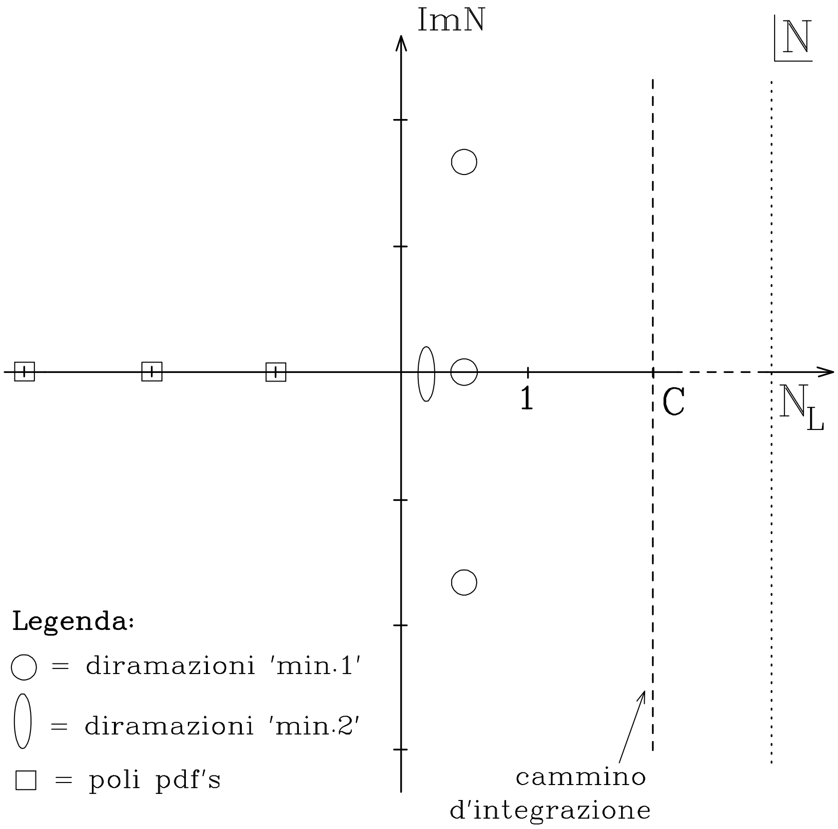


Figura 7.1: Piano di N complesso, con le singolarità relative alla trasformazione inversa di Mellin e le altre strutture notevoli

La funzione contiene inoltre *logaritmi* di variabile complessa: l'estensione a partire dall'asse reale è possibile in modo non ambiguo in regioni del piano complesso che non contengano cammini chiusi attorno ai punti di diramazione di questi logaritmi. La posizione di questi punti di diramazione cambia a seconda della scelta dell'espressione algebrica per il minimo ('min.1' oppure 'min.2') ma si collocano comunque nel semipiano del piano complesso individuato da

$$\mathrm{Re}\, N \leqslant \frac{1}{2} \tag{7.10}$$

La necessità di mantenersi al di sopra del *polo di Landau* per la costante di accoppiamento è espressa nello spazio delle variabili coniugate N e b dalla condizione $X^2 > \Lambda^2_{QCD}$. Questa condizione genera un limite superiore (N_L)

per N (e quindi per la posizione di C sull'asse reale) dato da

$$N < N_L = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{1}{\Lambda_{QCD}^2} - b^2} \qquad \text{per la scelta 'min.1'} \tag{7.11a}$$

$$N < N_L = \frac{Q}{2}\left(\frac{1}{\Lambda_{QCD}} - b\right) \qquad \text{per la scelta 'min.2'} \tag{7.11b}$$

Per valori di b non troppo grandi ($b \ll 1/\Lambda_{QCD}$) è evidente che N_L si colloca all'"estrema destra" dell'asse di N reale, come previsto.

La fig.7.1 mostra qualitativamente la posizione dei punti singolari sul piano di N complesso individuati finora, e una possibile posizione corretta per il cammino di integrazione.

Per implementare realmente l'integrazione lungo l'asse immaginario, è necessario controllare che la restrizione a questo cammino della funzione integranda sia integrabile. Una analisi dell'*andamento asintotico* dell'esponenziale $\mathbb{S}$ permette di ricavare

$$\mathbb{S} \underset{\mathrm{Im}\,N\to\pm\infty}{\sim} \exp\left\{-\frac{C_F}{\pi b_0}\ln\left[4\,(\mathrm{Im}\,N)^2\right]\ln\left(\frac{\ln\left[4\,(\mathrm{Im}\,N)^2\right]}{\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}}\right)\right\} \underset{\mathrm{Im}\,N\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{7.12}$$

che quindi tende a zero, con un andamento tra l'altro superiore ad ogni potenza.

Altri fattori che contribuiscono alle proprietà asintotiche sono le funzioni di struttura, che si annullano con andamento di tipo potenza per $\mathrm{Im}\,N \to \pm\infty$ e il fattore τ^{-N}, che è oscillante. La funzione è quindi senza problemi integrabile.

7.1.5 Trasformazione inversa di Fourier

La trasformazione inversa di Fourier nella (6.84) comporta meno problemi da un punto di vista analitico, ma anche in questo caso bisogna confrontarsi con il trattamento della regione non perturbativa.

La necessità di mantenersi al di sopra del *polo di Landau* nello spazio dei b è espressa dalla condizione

$$b \lesssim \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \tag{7.13}$$

come discusso in §3.2.3 (o in §3.2.4). Seguendo [11](e tutta la letteratura seguente), per poter svolgere comunque l'integrazione su $b \in (0, +\infty)$ scegliamo di definire la variabile riscalata

$$b^* = \frac{b}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{b_{\max}}\right)^2}} \tag{7.14}$$

dove $b_{\max}$ rappresenta il valore massimo che può assumere b mantenendosi comunque fuori dalla regione non perturbativa (quindi $b_{\max} <\sim 1/\Lambda_{QCD}$). Questa procedura comporta però l'introduzione della funzione correttiva non perturbativa F^{NP}, detta "funzione di smearing", come discusso in §3.2.4. La variabile b^* va a rimpiazzare b nell'esponente $\mathbb{S}(Q, b, N)$ della (6.85), e quindi in particolare in X^2; si noti che, di conseguenza, nelle espressioni (7.11) compare di fatto b^*.

Per gli scopi delle nostre stime quantitative, ci atteniamo per F_N alla forma più semplice. Assumiamo quindi

$$F^{NP}(Q, Q_0, g_2, b) = \exp\left[-\ln\frac{Q}{2Q_0} g_2 b^2\right] \tag{7.15}$$

Le scelte dei parametri Q_0 e g_2 sono un aspetto molto delicato del problema (discusso ampiamente per esempio in [14]) e sono riportate in seguito.

Questo tipo di struttura per la funzione di smearing, introdotto da Collins, Soper e Sterman, è però valido a patto di non spingersi troppo in regime di soglia. Questo aspetto si può qualitativamente comprendere nel seguente modo: la sezione d'urto totale, prescindendo dagli effetti di soglia, del processo di Drell-Yan mostra una dipendenza da τ data dalla seguente espressione, avendo assunto le forme indicate in precedenza per le funzioni di struttura:

$$\sigma(\tau) \propto \tau\left(-3 + 3\tau^2 - \ln\tau \cdot (\tau^2 + 4\tau + 1)\right) \tag{7.16}$$

(è possibile ricavarla esplicitamente dalla nostra formula conclusiva integrando sui momenti trasversi e fissando ad 1 l'esponente di Sudakov: si trascura quindi ogni effetto della risommazione). Del resto assumere una forma come quella in (7.15) significa implicitamente assegnare al bosone vettore prodotto un momento trasverso il cui quadrato è dell'ordine del coefficiente che moltiplica b^2: indichiamolo con $\Delta q_\perp^2$; vista la definizione di τ, $\Delta q_\perp^2$ si riflette su un incremento di questa variabile, che denotiamo con $\Delta\tau$. Qualitativamente si può affermare che: se la variazione della sezione d'urto totale sotto la traslazione da τ a $\tau + \Delta\tau$ è contenuta, allora si può considerare ininfluente il momento trasverso aggiunto a forza per il bosone; se viceversa la variazione è sostanziale, allora queste manipolazioni sono illecite. E' intuitivo che per valori di τ molto vicini alla soglia saranno maggiori gli effetti, in quanto diventa non trascurabile la "quantità di energia" che si assegna alla componente trasversa del bosone. Ci sarà un valore discriminate di τ oltre il quale la sezione d'urto totale subisce variazioni troppo grosse ($\gtrsim 25\%$) per ritenere questo metodo anche solo qualitativamente affidabile. Questo valore di τ è ovviamente in dipendenza delle scelte dei parametri Q_0 e g_2. Da ultimo, segnaliamo di aver riscalato gli intervalli dell'integrazione su $\operatorname{Im} N \in (-\infty; +\infty)$ e su $b \in (0; +\infty)$ passando alle variabili x t.c. $\operatorname{Im} N = \frac{x}{1-x}$, y t.c. $b = \frac{y}{1-y}$; $x,y \in (0,1)$.

In seguito a tutte queste manipolazioni, l'integrazione bidimensionale da effettuare risulta

$$\frac{d\sigma}{dq_\perp^2} = \sigma_0 \frac{1}{\tau}\frac{1}{2\pi} \int \frac{dy}{(1-y)^2} b \mathbf{J}_0(q_\perp b) \int \frac{dx}{(1-x)^2} \tau^{-N} F_{N+1}^2 \cdot \mathbb{S}(Q,b,N) \cdot F^{NP} \tag{7.17}$$

essendo $\mathbb{S}(Q,b,N)$ quello di (6.85), con una delle scelte per X^2 e μ^2 discusse in precedenza, e F^{NP} riportata in (7.15).

7.2 Risultati

Presentiamo i risultati della distribuzione di momento trasverso per la produzione di un bosone vettore di massa $Q = 10\ GeV$ da un processo di collisione adronica, per esempio di *protone-antiprotone*, normalizzata rispetto alla sezione d'urto di Born:

$$\tau \frac{1}{\sigma_0} \frac{d\sigma}{dq_\perp^2} \tag{7.18}$$

L'energia totale della collisione S (energia dei fasci adronici nel centro di massa) è una variabile libera, nel senso che calcoleremo la stessa grandezza per diversi valori di $\tau = Q^2/S$ ($\tau \in (0,1)$). Valori elevati di τ corrispondono al regime di soglia.

Il range di momenti trasversi $q_\perp$ considerati è fissato in $0\ GeV \longrightarrow 4\ GeV$. In tutto il nostro lavoro abbiamo infatti analizzato la regione $q_\perp^2 \ll Q^2$. Del resto, al di sopra di valori dell'ordine di $q_\perp \sim 4\ GeV$ le distribuzioni presentano piccole irregolarità ingiustificate, come previsto dal fatto che viene meno l'affidabilità della formula usata per calcolarle.

I risultati presentati sono calcolati inoltre con le seguenti scelte per i parametri[2]:

$$\Lambda_{QCD} = 200\ MeV \tag{7.19}$$
$$b_{\max} = 2\ GeV^{-1} \tag{7.20}$$
$$C = \mathrm{Re}\, N = 2 \tag{7.21}$$
$$Q_0 = 2\ GeV \tag{7.22}$$
$$g_2 = 0.4\ GeV^2 \tag{7.23}$$

Il valore assegnato a $b_{\max}$ è motivato dalla discussione riportata per esempio in §7.1.5. Osserviamo in particolare che con questa scelta si ha $N_L \geqslant 15$ nelle (7.11) e quindi la posizione assunta per l'asse immaginario di integrazione ($C = 2$) è del tutto sicura, ossia in linea con la "Minimal Prescription" discussa in (7.1.4).

I valori assunti per Q_0 e g_2 sono un aspetto delicato del problema, discusso per esempio, come abbiamo detto più volte, in [14].

Con queste scelte per Q_0 e g_2 il valore discriminante per τ, oltre il quale non è consigliabile spingersi visto il metodo scelto per la trattazione della regione non perturbativa (cfr. la discussione nella sezione precedente §7.1.5), è dell'ordine di $\tau \sim 0.3$. Per poter sondare valori più alti di τ sarebbe necessario modificare il metodo di trattamento della regione non perturbativa sui b, senza che si debba peraltro cambiare l'impostazione teorica generale della nostra trattazione, e neppure la forma del nostro risultato finale.

7.2.1 Dipendenza dalla scala di fattorizzazione

I grafici in fig.7.2 mostrano le distribuzioni di momento trasverso, per vari valori di τ, calcolate con le scelte (per la scala di fattorizzazione) $\mu = Q/2$ (linea continua) e $\mu = Q$ (linea punteggiata).

Si osserva che la differenza è piccola, sia in termini assoluti ($< 30\%$) che, soprattutto, in termini di forma delle curve prodotte. Nel seguito ci atterremo sempre alla scelta di $\mu = Q/2$.

7.2.2 Dipendenza dalla forma del minimo

I grafici in fig.7.3 raffigurano le distribuzioni di momento trasverso, per vari valori di τ, calcolate con le due possibilità selezionate per la forma algebrica

[2] Per il significato di ognuno di essi, si consulti eventualmente la sezione precedente di questo capitolo e i rimandi in essa.

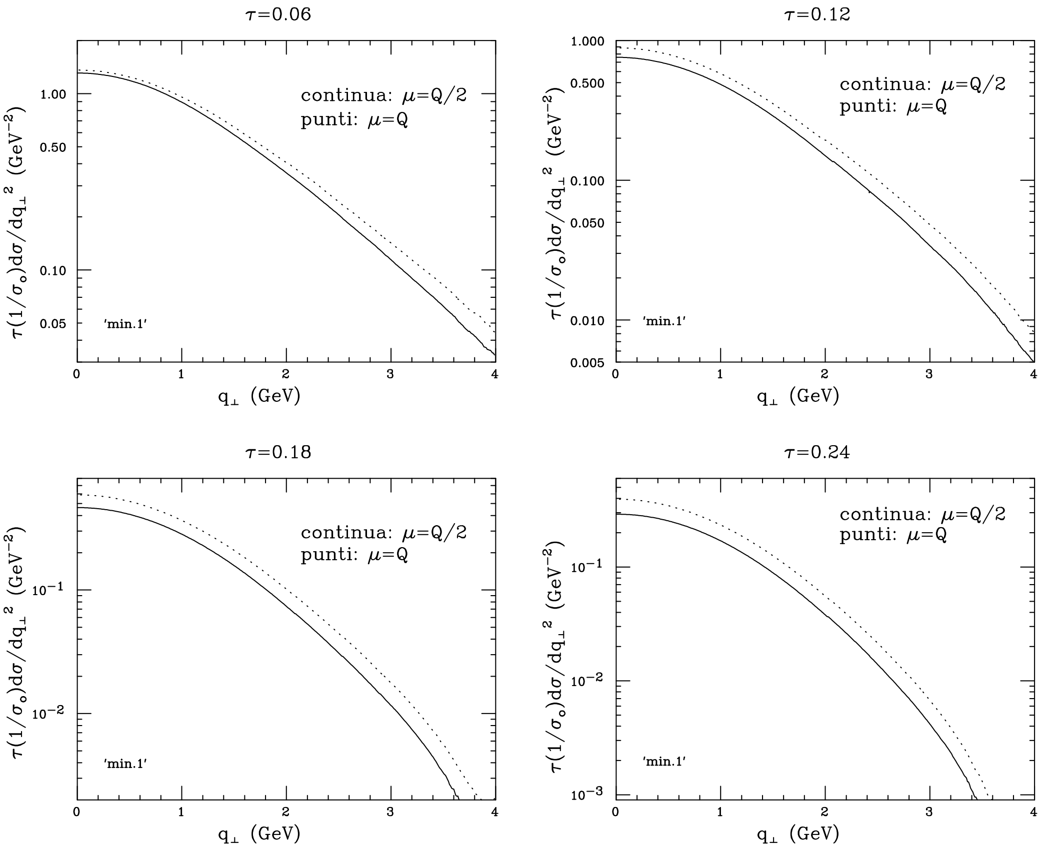


Figura 7.2: Dipendenza dalla scala di fattorizzazione delle distribuzioni di momento trasverso. Per quattro diversi valori di τ, sono rappresentate le distribuzioni ottenute dalla nostra formula completa con la scelta $\mu = Q/2$ (linea continua) e $\mu = Q$ (linea tratteggiata). In tutti i casi la forma algebrica della funzione minimo è scelta essere 'min.1'

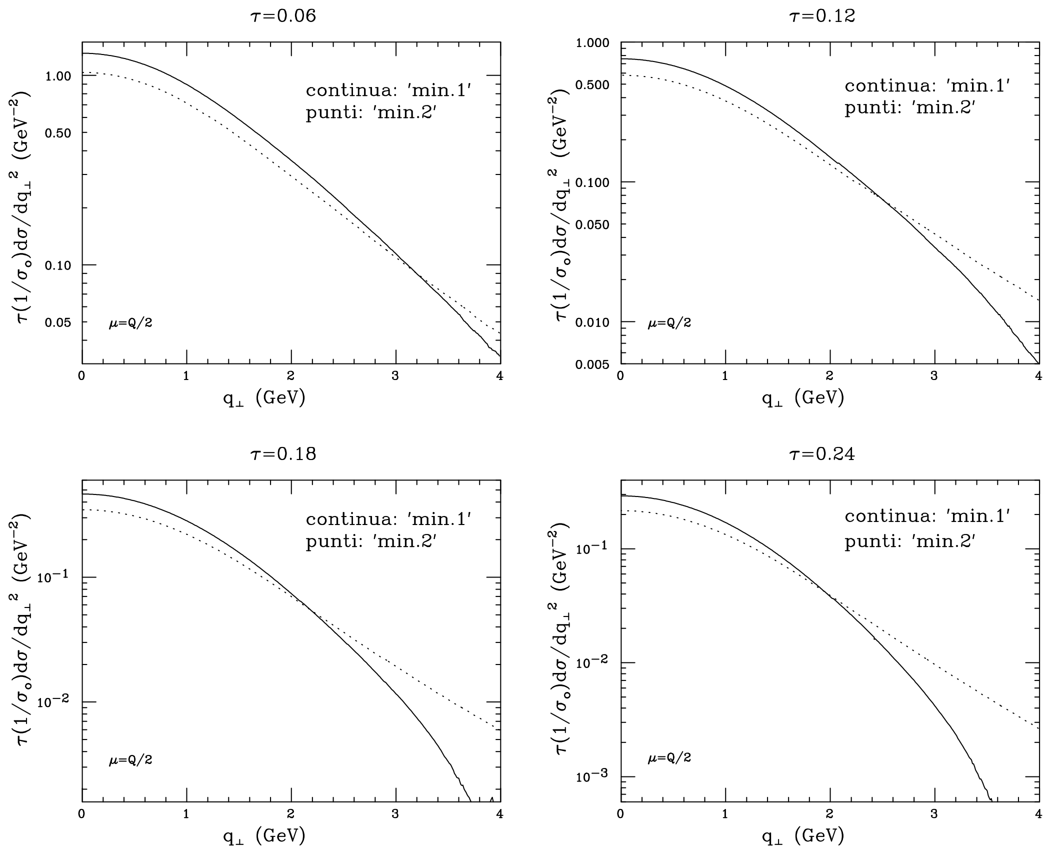


Figura 7.3: Dipendenza delle distribuzioni di momento trasverso dalla forma algebrica scelta per approssimare la funzione minimo. Per quattro diversi valori di τ, sono rappresentate le distribuzioni ottenute dalla nostra formula completa con la scelta 'min.1' (linea continua) e 'min.2' (linea tratteggiata). In tutti i casi la scala di fattorizzazione è scelta essere $\mu = Q/2$

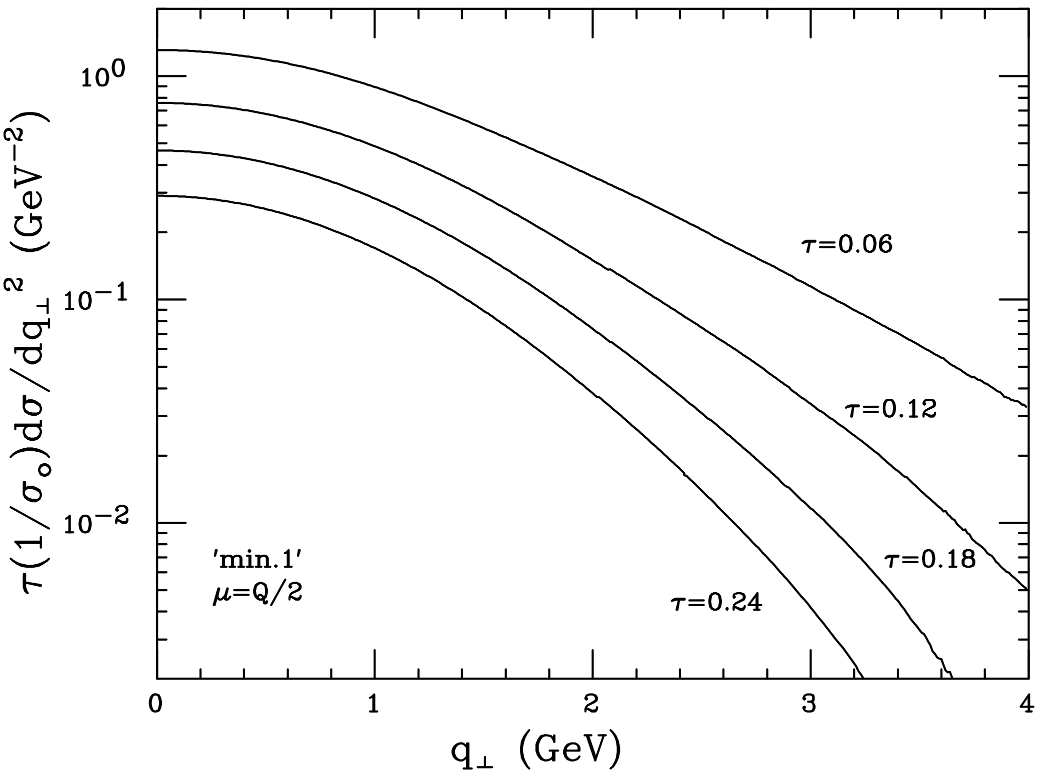


Figura 7.4: Distribuzioni di momento trasverso, calcolate con la nostra formula completa (6.84)/(6.85), per diversi valori di τ. In tutti i casi la scala di fattorizzazione è fissata a $\mu = Q/2$ e l'espressione algebrica del minimo è scelta essere 'min.1'.

della funzione minimo X^2: la curva continua è calcolata con la scelta 'min.1', la curva punteggiata con la scelta 'min.2'.

Si nota che le due possibilità differiscono leggermente: in particolare la scelta 'min.2' sottostima lievemente la regione di piccoli $q_\perp$ e sovrastima apprezzabilmente la regione di $q_\perp$ maggiori. Nella regione più interessante ai fini del nostro studio ($q_\perp$ piuttosto piccoli, $q_\perp < 2$) la discrepanza non è molto significativa, e soprattutto non dimostra di dipendere sensibilmente dal valore di τ considerato. Nel seguito utilizziamo preferibilmente la definizione 'min.1'.

7.2.3 Importanza degli effetti di soglia

Il grafico in fig.7.4 riporta le distribuzioni di momento trasverso per vari valori di τ, calcolate con la nostra formula. Quello in fig.7.5 riporta invece quelle

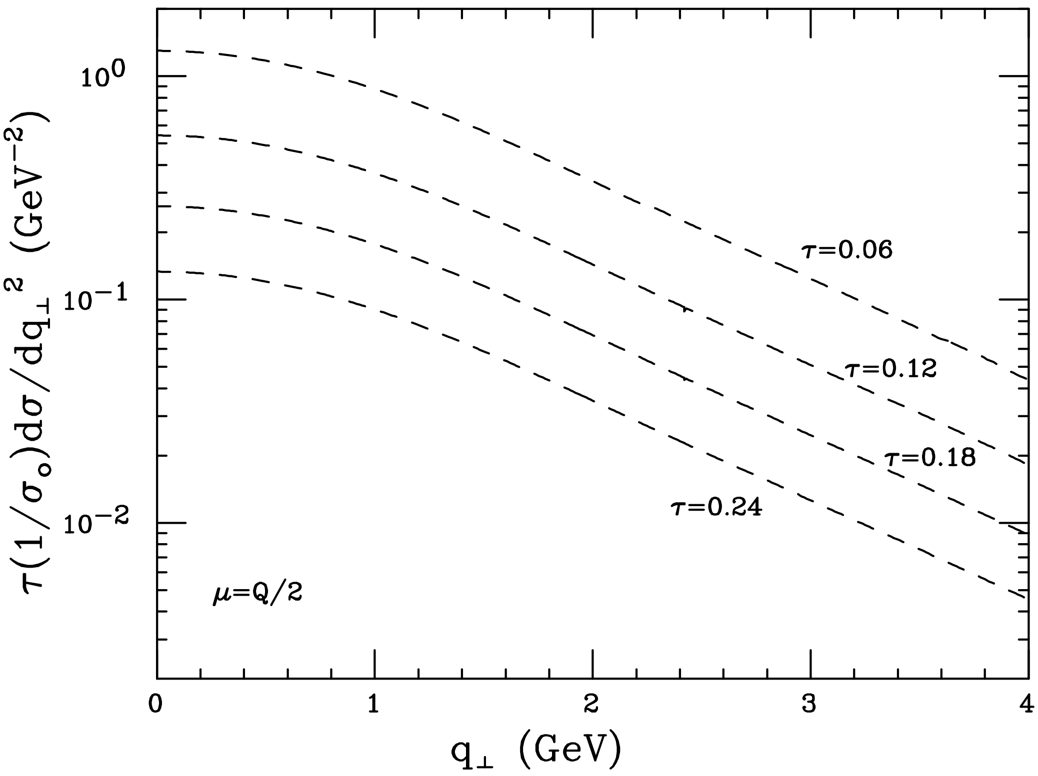


Figura 7.5: Distribuzioni di momento trasverso, calcolate trascurando gli effetti di soglia (ossia con N fissato e piccolo nell'esponente di Sudakov), a vari valori di τ. In tutti i casi la scala di fattorizzazione è fissata a $\mu = Q/2$.

ottenute dalla formula che trascura gli effetti di soglia, cioè dall'espressione che si ha imponendo un valore piccolo e fissato per N nell'esponente di Sudakov.

Come prevedibile, al diminuire dell'energia nel centro di massa (al crescere di τ) diminuisce la sezione d'urto in valore assoluto per entrambe le trattazioni.

La prima differenza rilevante tra le distribuzioni di fig.7.4 e di fig.7.5 è però il fatto che nel primo caso le curve mostrano un andamento diverso al crescere di τ: l'avvicinarsi alla soglia causa il restringersi della distribuzione in $q_\perp$ e privilegia i piccoli momenti trasversi. Questo è ben comprensibile qualitativamente se si pensa che l'approssimarsi alla soglia corrisponde al diminuire dell'energia "a disposizione" dei gluoni di bremsstrahlung: l'inibizione all'emissione di gluoni di momento (trasverso) non piccolo è quindi maggiore. La trattazione che trascura gli effetti di soglia non registra questo effetto, e le curve sono uguali, seppure traslate in valore assoluto, per ognuno dei diversi valori di τ.

Il grafico in fig.7.6 riporta, riscalate, le distribuzioni di fig.7.4: è evidente il restringimento verso piccoli $q_\perp$ al crescere di τ. Le distribuzioni della fig.7.5, riscalate allo stesso modo, vanno a sovrapporsi l'una all'altra e coincidono quasi perfettamente con la curva di $\tau = 0.06$.

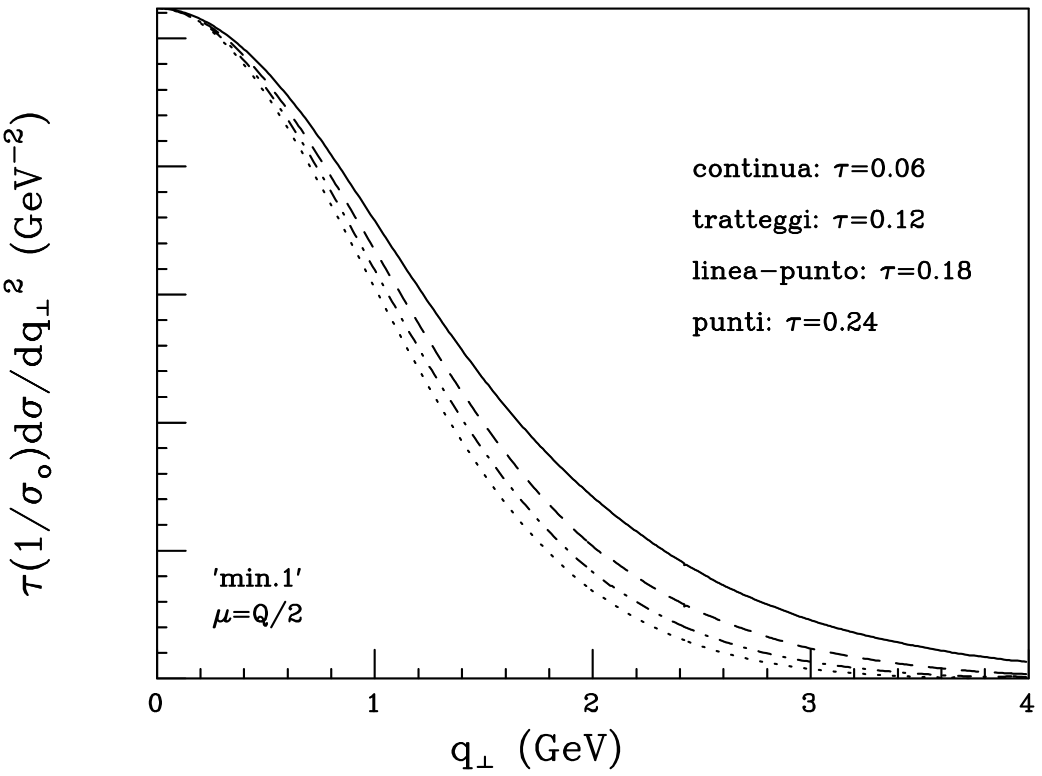
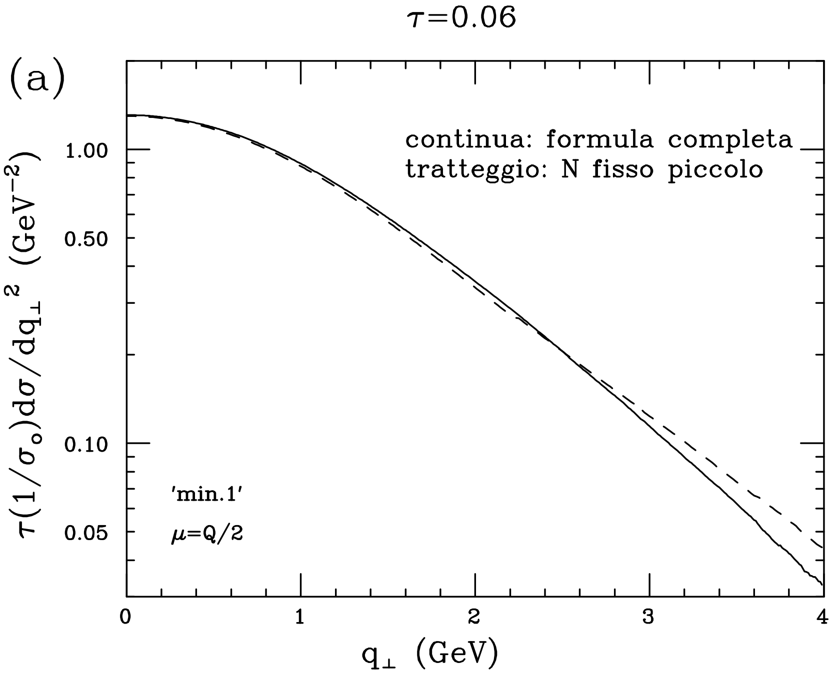
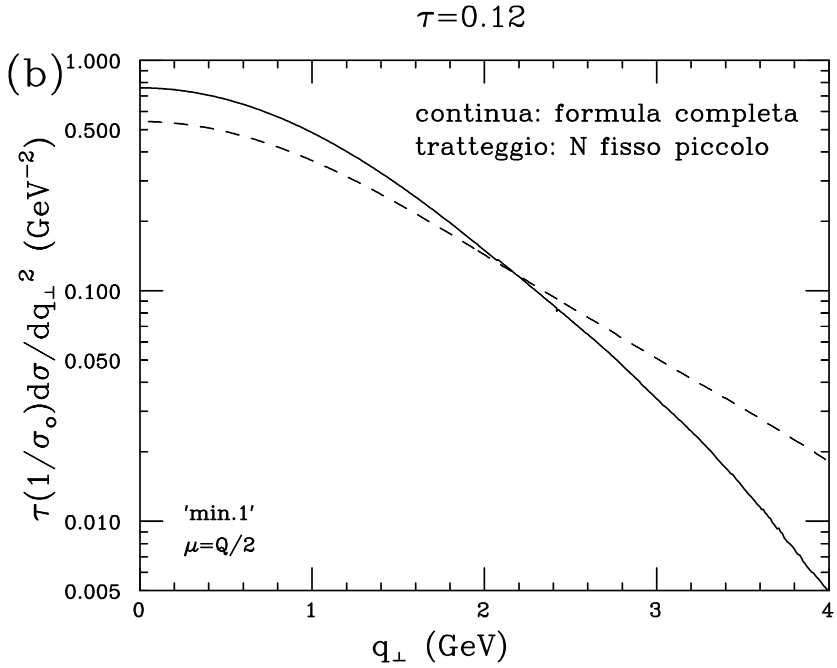


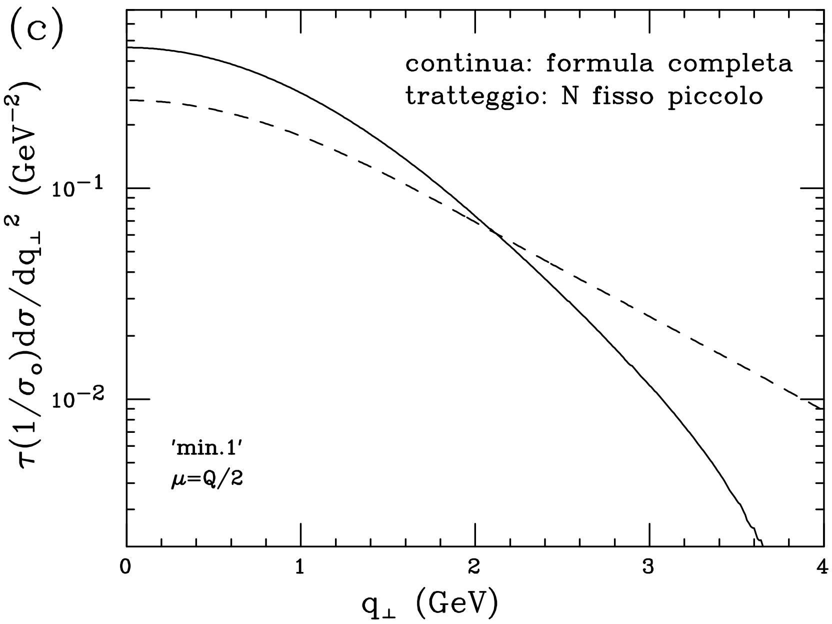
Figura 7.6: Distribuzioni di momento trasverso della fig.7.4, rappresentate in scala lineare e riscalate.

L'altra importante differenza dovuta agli effetti di soglia è rappresentata nelle fig.7.7a,b,c,d. Al crescere di τ le previsioni della formula che trascura gli effetti di soglia (linea tratteggiata) si discostano significativamente dalle previsioni della nostra formula completa. Infatti per $\tau = 0.06$ (fig.7.7a) le formule danno previsioni pressochè coincidenti. Per τ crescente (avvicinandosi al regime di soglia) (fig.7.7b,c,d) l'inclusione degli effetti di soglia amplifica la sezione d'urto per piccoli momenti trasversi e deprime quella per momenti trasversi più grossi. Per $\tau = 0.24$ la discrepanza può arrivare anche a valori dell'ordine del 40% per $q_\perp \sim 0$.


τ=0.06
(a)
continua: formula completa
tratteggio: N fisso piccolo
'min.1'
μ=Q/2
τ(1/σ₀)dσ/dq⊥² (GeV⁻²)
q⊥ (GeV)
1.00
0.50
0.10
0.05
0
1
2
3
4


τ=0.12
(b)
continua: formula completa
tratteggio: N fisso piccolo
'min.1'
μ=Q/2
τ(1/σ₀)dσ/dq⊥² (GeV⁻²)
q⊥ (GeV)
1.000
0.500
0.100
0.050
0.010
0.005
0
1
2
3
4

τ=0.18



τ=0.24

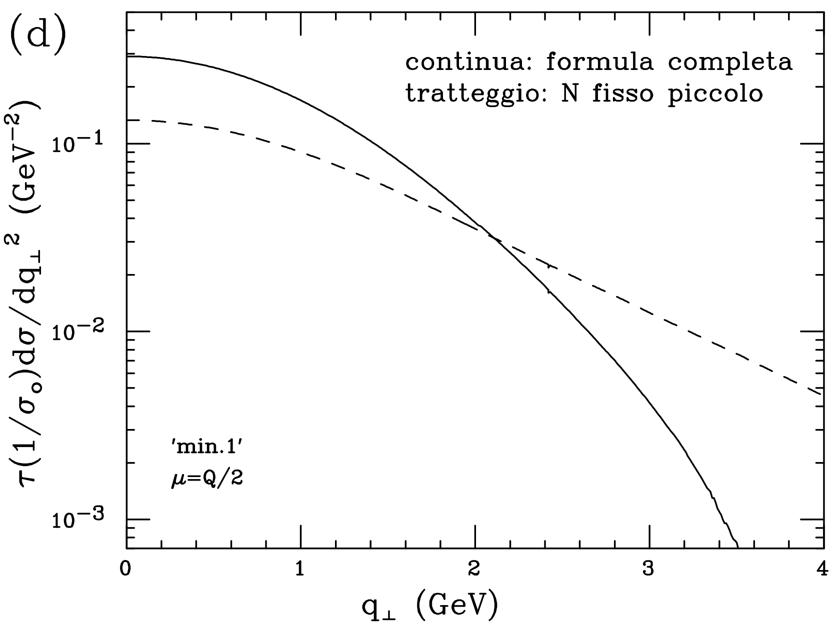


Figura 7.7: Le distribuzioni di fig.7.4 (linea continua) messe a confronto per ognuno dei valori di τ con le corrispondenti distribuzioni di fig.7.5 (linea tratteggiata).

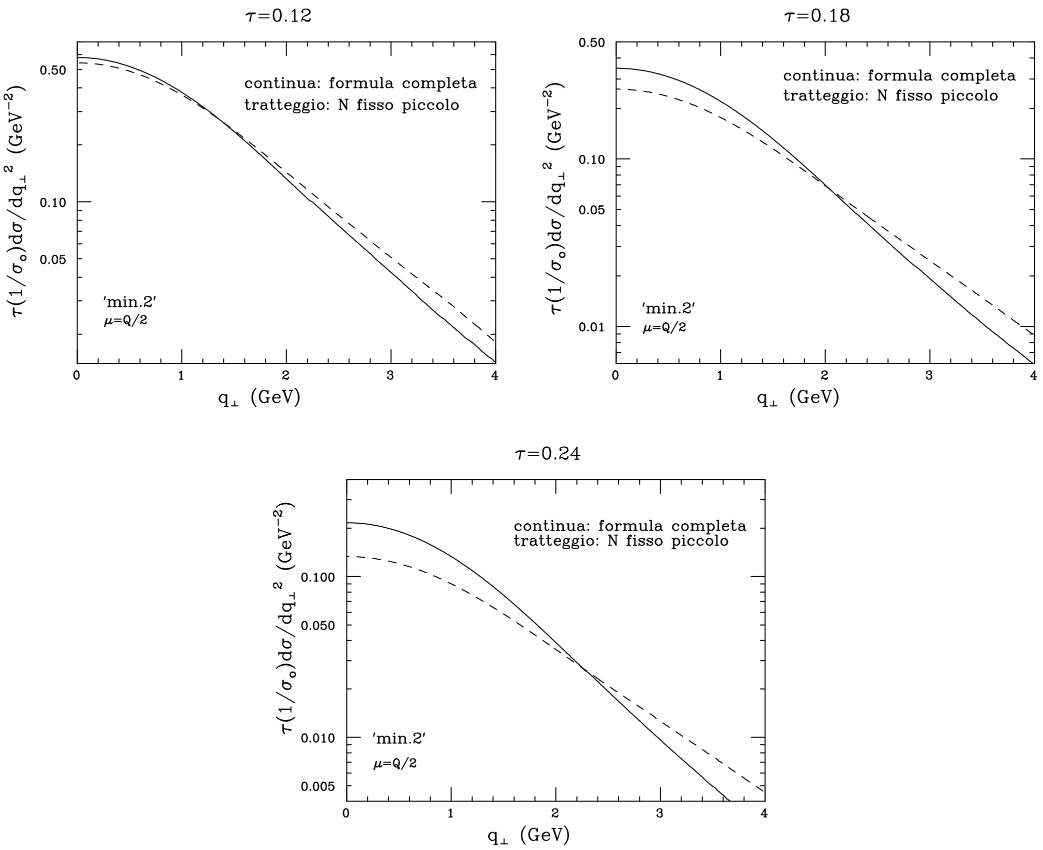


Figura 7.8: Le distribuzioni calcolate con la nostra formula completa (6.84)/(6.85) utilizzando la scelta 'min.2' messe a confronto, per i diversi valori di τ, con le distribuzioni calcolate trascurando gli effetti di soglia.

Da ultimo osserviamo che i grafici ottenuti dalla nostra formula nelle fig.7.4 $\longrightarrow$ 7.7 sono prodotti con la scelta 'min.1' per la forma algebrica del minimo. Lo stesso tipo di analisi si può fare con l'altra scelta: 'min.2'. I confronti tra le previsioni della formula completa e la formula che trascura gli effetti di soglia sono riportati per questo caso nei grafici di fig.7.8: i risultati sono del tutto simili, anche se in questo caso la coincidenza tra le due formule si sposta su valori un po' più alti di τ (dell'ordine di 0.12).

Riassumendo, la nostra nuova trattazione, che prevede l'inclusione degli effetti di soglia nella formula per la distribuzione di momento trasverso, apporta significative modifiche alle previsioni finora utilizzate, che trascurano questi effetti, soprattutto in due direzioni:

- il restringimento della distribuzione a favore dei piccoli momenti trasversi, procedendo verso la soglia;

- il diverso andamento della distribuzione in quanto tale, con un potenziamento della regione di piccoli $q_\perp$ e una depressione di quella di $q_\perp$ più grossi.

Capitolo 8

Conclusioni

In questo lavoro di tesi ci siamo occupati dei processi di collisione adronica con produzione di un oggetto di grande massa invariante, nei regimi di piccolo momento trasverso e nelle vicinanze della soglia di produzione. In particolare abbiamo focalizzato l'attenzione sul processo di Drell-Yan, in quanto è il più semplice e il più studiato esempio di questo tipo, ma i risultati sono generalizzabili a processi più complicati. In questi regimi cinematici estremi, acquista grande importanza la radiazione di bremsstrahlung di gluoni soffici da parte delle particelle di stato iniziale. Essa apporta importanti correzioni logaritmiche (Logaritmi di Sudakov) che devono essere risommate.

In letteratura sono state ricavate da tempo formule risommate per entrambe le regioni limite, ma non si era finora ottenuta una formula completa che comprendesse in una trattazione consistente la distribuzione a piccoli momenti trasversi e in regime di soglia. Sono molteplici le ragioni teoriche e sperimentali che suggeriscono l'utilità di una tale trattazione, e gli studi che ne trarrebbero vantaggio. Citiamo per tutti, ad esempio, lo studio delle grandezze relative alla produzione di una coppia di *top-antitop* al Tevatron, un problema che è anche di stringente attualità.

Il nostro risultato conclusivo è una formula completa per questa intersezione di regimi (formula (6.84)/(6.85) in §6.4.3). Il calcolo è accurato al livello dei Logaritmi Dominanti (LLA).

Confidiamo che l'estensione al livello dei Logaritmi Sottodominanti (NLL) sia possibile. Un affinamento del nostro risultato in questo direzione è certamente auspicabile, dato anche il fatto che le formule per i due regimi separati sono già note con buona confidenza fino all'ordine NLL.

Abbiamo ottenuto con la nostra formula finale alcuni risultati numerici, con lo scopo di evidenziare le sue caratteristiche sostanziali. Le stime ottenute, a causa delle semplificazioni convenzionali attuate, non vanno interpretate strettamente come previsioni rigorose sulle quantità fisiche, ma piuttosto come indicazione dell'importanza relativa degli effetti considerati.

Confrontando le distribuzioni a piccolo momento trasverso ricavate dal nostro risultato completo con quelle della trattazione che trascura gli effetti dell'avvicinamento alla soglia (τ crescente), emergono in modo inequivocabile le differenze, sia in termini dell'andamento qualitativo che in termini quantitativi. In particolare: a) viene previsto un restringimento della distribuzione a favore dei momenti trasversi più piccoli a mano a mano che si procede verso la soglia; b) i valori assoluti delle distribuzioni vengono amplificati, nella regione di momenti trasversi molto piccoli, rispetto alla trattazione che non include gli effetti di soglia, e questa tendenza si rafforza per τ crescenti.

Le nostre analisi numeriche sono limitate dal metodo seguito per la trattazione della regione non perturbativa. Questo metodo è stato introdotto in letteratura in regimi lontani dalla soglia, e non si mostra particolarmente adatto ad essere applicato per τ molto elevati. Pur rimanendo completamente valida la nostra formula finale, per estrarre da essa previsioni numeriche affidabili in regimi ancora più al limite è quindi necessario raffinare questi aspetti fenomenologici.

Appendice A

Definizioni, costanti e proprietà di uso frequente

Costanti:

$$\gamma_E = 0.5772\ldots \tag{A.1}$$

$$\alpha_{em} = 7.3 \cdot 10^{-3} \simeq \frac{1}{137} \tag{A.2}$$

Fattori caratteristici di QCD:

$$\text{scala energetica tipica delle interazioni forti: } \Lambda_{QCD} \simeq 200\ MeV \tag{A.3}$$

$$C_F = \frac{4}{3} \qquad C_A = 3 \qquad T_R = \frac{1}{2} \tag{A.4}$$

$$\alpha_s(M_{Z^0}) \approx 0.122 \tag{A.5}$$

$$\text{coefficienti della RGE (vedi App.B): } b_0 = \frac{11C_A - 4T_R n_f}{12\pi} \tag{A.6}$$

$$b_1 = \frac{17C_A^2 - 10C_A T_R n_f - 6C_F T_R n_f}{24\pi^2} \tag{A.7}$$

$$\text{numero di sapori dei quark: } n_f \tag{A.8}$$

Proprietà della Delta di Dirac:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \tag{A.9}$$

$$\delta(f(x)) = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0) \qquad (f(x_0) = 0) \tag{A.10}$$

Appendice B

Cenni all'equazione del gruppo di rinormalizzazione

Nelle teorie di campo ci si scontra con la nascita di divergenze ultraviolette: le teorie di campo rinormalizzabili sono le uniche accettabili e sono quelle in cui queste divergenze possono essere rimosse a tutti gli ordini attraverso una consona ridefinizione delle costanti e dei campi. In particolare questo vale anche per la costante di accoppiamento α_s della QCD. Tra le altre cose, il procedimento di rinormalizzazione impone infatti che α_s soddisfi la seguente equazione, detta "del gruppo di rinormalizzazione" ("Renormalization Group Equation", RGE)[1]:

$$\frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d\ln\mu^2} = -b_0\alpha_s^2(\mu^2) - b_1\alpha_s^3(\mu^2) - b_2\alpha_s^4(\mu^2) + \dots \tag{B.1}$$

I primi coefficienti di questa equazione sono

$$b_0 = \frac{11C_A - 4T_R n_f}{12\pi} \tag{B.2}$$

$$b_1 = \frac{17C_A^2 - 10C_A T_R n_f - 6C_F T_R n_f}{24\pi^2} \tag{B.3}$$

essendo $C_F = 4/3$, $C_A = 3$, $T_R = 1/2$, n_f il numero dei sapori di quark (attivi).

Arrestandosi al primo ordine, dunque si ha

$$\frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d\ln\mu^2} = -b_0\alpha_s^2(\mu^2) \tag{B.4}$$

[1]Cfr. per esempio [46]

riscrivibile come

$$\frac{d}{d\ln\mu^2}\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = b_0 \tag{B.5}$$

Questa si risolve facilmente integrando direttamente nella variabile $\ln\mu^2$ (μ_0 costante di integrazione)

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = b_0 \ln\frac{\mu^2}{\mu_0^2} + \frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)} \tag{B.6}$$

Si usa riscrivere la costante di integrazione passando a

$$\Lambda_{QCD}^2 = \mu_0^2 \left(\exp\frac{1}{\alpha_s(\mu_0^2)}\right)^{-1/b_0} \tag{B.7}$$

in modo tale che la soluzione prende la forma compatta

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = b_0 \ln\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2} \tag{B.8}$$

ossia

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{1}{b_0 \ln\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}} \tag{B.9}$$

Appendice C

Cinematica di un processo di Drell-Yan

In questa Appendice stabiliamo alcune definizioni e svolgiamo esplicitamente alcuni passaggi utili a leggere meglio la cinematica del processo di Drell-Yan (e dei processi simili) e le grandezze che vengono presentate.[1] La figura di riferimento è fig.2.1 e il pretesto per iniziare è la forma dell'espressione della distribuzione di momento trasverso (cfr. equ.(3.1)).

La sezione d'urto partonica $\frac{d\widehat{\sigma}}{dq_\perp^2}$ va convoluta con le funzioni di struttura, ossia integrata su x_1 e x_2, per risalire alla quantità adronica. Schematicamente:

$$\frac{d\sigma}{dq_\perp^2} = \int dx_1 dx_2 f(x_1) f(x_2) \frac{d\widehat{\sigma}}{dq_\perp^2} \tag{C.1}$$

Si preferisce allora presentare la grandezza "triplamente differenziale"

$$\frac{d\sigma}{dx_1 dx_2 dq_\perp^2} \tag{C.2}$$

Anzi, si passa alle variabili Q^2 (massa del bosone vettore) e y (rapidità).
La rapidità y del bosone virtuale (e quindi della coppia prodotta) è definita come

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{q_0 + q_{||}}{q_0 - q_{||}} \tag{C.3}$$

[1] Cfr. [42].

dove q_0 è la prima componente del quadrivettore del bosone misurata nel centro di massa degli adroni incidenti; $q_{||}$ è la componente longitudinale nello stesso sistema. Il significato fisico della rapidità si intuisce osservando che se $y = 0$ il bosone emerge ortogonalmente all'asse dei partoni.

Per ottenere il legame tra le vecchie e le nuove variabili è comodo porsi nel sistema di riferimento del centro di massa degli adroni. In questo sistema i momenti degli adroni assumono la forma esplicita $P = (E, 0, 0, E)$, $\overline{P} = (E, 0, 0, -E)$. I partoni posseggono una frazione x_i del momento longitudinale degli adroni: trascurando la piccola componente trasversa possiamo allora scrivere i loro momenti come $p = (x_1 E, 0, 0, x_1 E)$ e $\overline{p} = (x_2 E, 0, 0, -x_2 E)$. Di conseguenza il bosone prodotto dall'annichilazione ha quadrimomento $q = p + \overline{p} = ((x_1 + x_2)E,\ 0,\ 0, (x_1 - x_2)E)$.

Calcolando il quadrato del quadrimomento del bosone si ha allora

$$Q^2 = x_1 x_2 S \tag{C.4}$$

Inoltre la definizione di rapidità si concretizza in

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \tag{C.5}$$

Le manipolazioni precedenti trascurano completamente l'eventualità di radiazione da parte dei partoni incidenti, che comporterebbe una minore energia e la comparsa di un momento trasverso per i partoni all'istante della annichilazione. Possiamo assumere che restino valide nell'ipotesi di radiazione soffice e collineare, nella quale di fatto sempre ci troviamo.

I legami tra le vecchie e nuove variabili x_1 e x_2, in approssimazione soffice, sono allora

$$\begin{cases} M^2 = x_1 x_2 S \\ y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_1}{x_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{M}{\sqrt{S}} e^{y} \\ x_2 = \frac{M}{\sqrt{S}} e^{-y} \end{cases} \tag{C.6}$$

Pertanto lo jacobiano $\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial M^2} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial x_2}{\partial M^2} & \frac{\partial x_2}{\partial y} \end{vmatrix}$ della trasformazione è $1/S$ e quindi il cambio di variabili dà

$$dx_1 dx_2 = \frac{1}{S} dQ^2 dy \tag{C.7}$$

La quantità che si presenta è allora

$$\frac{d\sigma}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = f(x_1) f(x_2) \frac{1}{S} \frac{d\widehat{\sigma}}{dq_\perp^2} \tag{C.8}$$

oppure, dato che $x_1 x_2 S = \widehat{s}$,

$$\frac{d\sigma}{dq_\perp^2 dQ^2 dy} = x_1 f(x_1) x_2 f(x_2) \frac{1}{\widehat{s}} \frac{d\widehat{\sigma}}{dq_\perp^2} \tag{C.9}$$

A volte si può per semplicità fissare la rapidità al valore $y = 0$; vista la definizione di rapidità nel sistema del centro di massa questo ammonta solo a imporre $x_1 = x_2$, quindi si presenta la grandezza

$$\left.\frac{d\sigma}{dq_\perp^2 dQ^2 dy}\right]_{y=0} = x f(x) x f(x) \frac{1}{\widehat{s}} \frac{d\widehat{\sigma}}{dq_\perp^2} \tag{C.10}$$

Fisicamente significa limitarsi a registrare le coppie il cui momento totale è ortogonale all'asse di incidenza dei fasci, cioè originate da un bosone virtuale emesso ortogonalmente all'asse di incidenza dei fasci.

Appendice D

Trasformazione di Mellin

La trasformazione di Mellin agisce su funzioni sufficientemente regolari di variabile reale[1], e produce funzioni di un numero complesso N. Si tratta di un formalismo molto vicino a quello delle trasformazioni di Fourier e di Laplace, ed infatti si può ottenere da quest'ultima con appositi cambi di variabile.

Data una funzione $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}_+$ si definisce la sua trasformata di Mellin F_N come

$$F_N := \int_0^1 \frac{dx}{x} x^N f(x) \tag{D.1}$$

La funzione F_N è detta "momento" (N-esimo) della $f(x)$. La regione di definizione di F_N è in dipendenza delle proprietà della funzione $f(x)$: in generale si tratta di una striscia verticale del piano complesso, ossia

$$N \text{ tale che } \sigma_1 < \operatorname{Re} N < \sigma_2 \tag{D.2}$$

Per esempio: supponiamo che la funzione $f(x)$ abbia in $x = 0$ un polo di tipo $\frac{1}{x^d}$ (situazioni di questo tipo sono le più comuni); allora per mantenere l'argomento della (D.1) integrabile nell'intervallo $(0, 1)$ deve essere $\operatorname{Re}(N - 1) \geqslant d$, ossia l'insieme di definizione della trasformata viene limitato al semipiano (del piano complesso) a destra di $d + 1$. Questo è solo un esempio qualitativo per suggerire il tipo di ragioni per le quali nasce la restrizione in (D.2).

[1] Per una contestualizzazione più precisa delle proprietà matematiche richieste, e in generale per una trattazione più rigorosa della materia, cfr. [45].

La trasformazione inversa è data da una integrazione sul piano complesso della variabile N:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN\ x^{-N} F_N \tag{D.3}$$

dove il cammino di integrazione è quindi una retta in direzione immaginaria che interseca l'asse reale nel punto C. La posizione del punto C è da scegliere all'interno della striscia indicata sopra.

Trasformate di Mellin abbastanza rilevanti per i nostri scopi sono quelle delle distribuzioni che originano dalla inibizione dell'emissione soffice alla soglia (cfr.§4.1):

$$\left(\frac{1}{1-z} \ln^k (1-z) \right)_+ \tag{D.4}$$

Alcuni momenti (agli ordini più bassi) risultano essere[2]

k	momento
0	$-(\gamma_E + \ln N)$
1	$\frac{1}{2}(\gamma_E + \ln N)^2 + \frac{1}{2}\zeta(2)$
2	$-\frac{1}{3}(\gamma_E + \ln N)^3 - \zeta(2)(\gamma_E + \ln N) - \frac{2}{3}\zeta(3)$

essendo $\zeta(n)$ la funzione Zeta di Riemann definita, per argomenti interi, da

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \tag{D.5}$$

[2]Cfr. per esempio l'Appendice A di [22]

Appendice E

Calcoli “Leading Order” e “Next to Leading Order” in regolarizzazione dimensionale

In questa appendice ci occupiamo di calcolare dettagliatamente le quantità relative al processo di Drell-Yan al LO e al NLO per la produzione di un bosone massivo (fig.E.1 e fig.E.2). In particolare calcoliamo l'ampiezza di scattering del livello Born in regolarizzazione dimensionale e la distribuzione di momento trasverso nel caso di una sola emissione in regolarizzazione dimensionale.

E.1 Calcolo della ampiezza di scattering di Born in regolarizzazione dimensionale

Consideriamo il diagramma di Feynman in fig.E.1. Le particelle incidenti sono quark e antiquark, ma il vertice di interazione non è di tipo forte, poichè stiamo considerando la produzione di un fotone virtuale massivo γ^*. Il calcolo è quindi, a questo livello, esclusivamente un'applicazione di QED.

Le usuali regole di Feynman per la QED permettono di calcolare l'ampiezza di scattering:

$$M_0 = u(p)(iq_f e)\gamma^\mu \overline{v}(\overline{p})\varepsilon^*_\mu(q) \tag{E.1}$$

dove $q_f e$ è la carica elettrica dei fermioni incidenti, espressa come un coefficiente (frazionario) che moltiplica la carica e dell'elettrone.

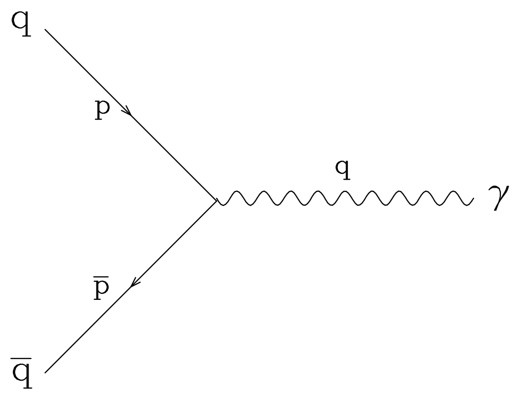


Figura E.1: Annichilazione di un quark e un antiquark in un fotone.

Si ottiene subito per il complesso coniugato

$$M_0^* = v(\overline{p})(-iq_f e)\gamma^\nu \overline{u}(p)\varepsilon_\nu(q) \tag{E.2}$$

L'ampiezza di scattering in modulo quadrato, mediando sulle polarizzazioni delle particelle in gioco risulta

$$\left|\overline{M_0}\right|^2 = \frac{1}{4}\sum_{pol.q\overline{q}}\sum_{pol.\gamma^*} q_f^2 e^2 u(p)\gamma^\mu \overline{v}(\overline{p})v(\overline{p})\gamma^\nu \overline{u}(p)\varepsilon_\mu^*(q)\varepsilon_\nu(q) \tag{E.3}$$

Valgono le relazioni seguenti di contrazione tra gli spinori di massa nulla

$$\sum_{pol} u(p)\overline{u}(p) = \not{p} \tag{E.4}$$

$$\sum_{pol} v(\overline{p})\overline{v}(\overline{p}) = \overline{\not{p}} \tag{E.5}$$

e si fa uso della relazione

$$\sum_{pol} \varepsilon_\mu^*(q)\varepsilon_\nu(q) = -g_{\mu\nu} \tag{E.6}$$

Inoltre le contrazioni degli indici spinoriali (omessi in questo calcolo) producono la traccia del prodotto di matrici. Si arriva allora a

$$\left|\overline{M_0}\right|^2 = -\frac{1}{4}q_f^2 e^2 \mathrm{Tr}\left[\not{p}\gamma^\mu \overline{\not{p}}\gamma^\nu\right] g_{\mu\nu} \tag{E.7}$$

Fino a questo punto abbiamo lavorato in 4 dimensioni. La regolarizzazione dimensionale prescrive di ambientare invece ogni calcolo in uno spazio a d dimensioni. Si definisce la quantità ε attraverso

$$d = 4 - 2\varepsilon \tag{E.8}$$

quindi essa rappresenta lo "shift" tra il caso d-dimensionale e la situazione fisica.

In d dimensioni la costante di accoppiamento e^2 risulta dimensionata e quindi va accompagnata da un coefficiente μ con le dimensioni di una massa: quello che si fa è rimpiazzare formalmente

$$e^2 \rightsquigarrow e^2\mu^{2\varepsilon} \tag{E.9}$$

Dunque in d dimensioni la ampiezza di scattering media diventa semplicemente

$$\left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 = -\frac{1}{4}q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon} \mathrm{Tr}\left[\not{p}\gamma^\mu \not{\overline{p}}\gamma^\nu\right] g_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon} p^\sigma \overline{p}^\rho \mathrm{Tr}\left[\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\right] g_{\mu\nu} \tag{E.10}$$

Le manipolazioni sulla traccia di matrici γ si svolgono grazie alla relazione generale (valida sia per $d = 4$ che per d generico)

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\right] = 4\left[g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}\right] \tag{E.11}$$

che nel nostro caso porta allora a

$$\left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 = -q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon}\left[p^\mu \overline{p}^\nu + p^\nu \overline{p}^\mu - p\cdot\overline{p}g^{\mu\nu}\right] g_{\mu\nu} \tag{E.12}$$

La contrazione tra i due tensori metrici è invece diversa in d dimensioni rispetto al caso tradizionale: vale infatti

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = d \tag{E.13}$$

Otteniamo allora

$$\left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 = -q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon}\left[2(p\cdot\overline{p}) - d(p\cdot\overline{p})\right] = q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon}(1-\varepsilon)2p\cdot\overline{p} \tag{E.14}$$

Si definisce come al solito l'energia invariante (di livello partonico) $\widehat{s}$ con

$$\widehat{s} = (p+\overline{p})^2 = 2p\cdot\overline{p} \tag{E.15}$$

(il secondo passaggio è lecito nel caso di fermioni di massa a riposo nulla come quelli che stiamo considerando) e quindi si arriva al risultato finale:

l'ampiezza di scattering in d dimensioni per il grafico di ordine Born in fig.E.1 è data da

$$\left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 = q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon}(1-\varepsilon)\widehat{s} \qquad (d \text{ dimensioni}) \tag{E.16}$$

Per ritornare al caso fisico delle 4 dimensioni è sufficiente porre $\varepsilon = 0$:

$$\left|\overline{M_0}\right|^2 = q_f^2 e^2 \widehat{s} \qquad (4 \text{ dimensioni}) \tag{E.17}$$

E.2 Calcolo della sezione d'urto totale di Born

Avendo in mano l'ampiezza di scattering per il grafico in fig.E.1, è immediato calcolare la sezione d'urto totale per lo stesso grafico.

Come è noto, la sezione d'urto si ottiene moltiplicando l'ampiezza di scattering per il fattore di flusso e lo spazio delle fasi delle particelle uscenti (in questo caso il solo fotone massivo)

$$\sigma(\widehat{s}) = \frac{1}{2\widehat{s}} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2q_0} \left|\overline{M_0}\right|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p+\overline{p}-q) \tag{E.18}$$

La δ^3 di conservazione dei momenti permette di risolvere in modo immediato l'integrazione in d^3q, mentre la δ di conservazione dell'energia si rimaneggia come fatto in §6.1.1 per giungere a

$$\sigma(\widehat{s}) = \frac{\pi}{\widehat{s}} \left|\overline{M_0}\right|^2 \delta(\widehat{s}-Q^2) = \frac{\pi}{\widehat{s}} \left|\overline{M_0}\right|^2 \frac{1}{\widehat{s}} \delta(1-\widehat{\tau}) \tag{E.19}$$

avendo posto $\widehat{\tau} = Q^2/\widehat{s}$.

Inserendo l'espressione (E.17) trovata per l'ampiezza di scattering, il risultato finale per la sezione d'urto totale di produzione di un bosone di massa Q^2 dalla annichilazione di $q\overline{q}$ è allora

$$\sigma(\widehat{s}) = \pi q_f^2 e^2 \frac{1}{\widehat{s}} \delta(1-\widehat{\tau}) \tag{E.20}$$

E.3 Calcolo della distribuzione di momento trasverso a NLO nel limite soffice in regolarizzazione dimensionale

Vogliamo ripartire dalla espressione (6.5) per la sezione d'urto del grafico NLO in fig.E.2 per portare avanti il conto in d dimensioni. Quella espressione,

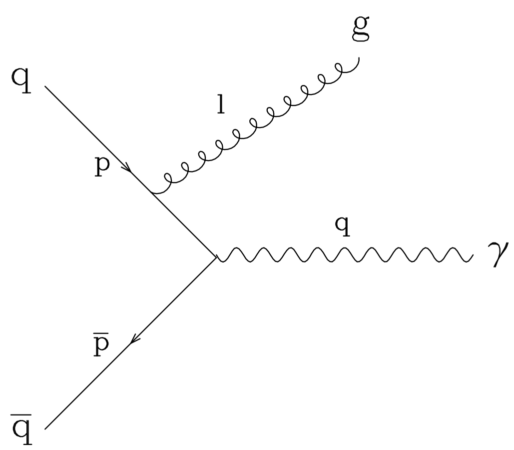


Figura E.2: Annichilazione di quark e antiquark in un fotone con emissione di un gluone reale.

generalizzata al caso di d dimensioni, diventa

$$d\widehat{\sigma} = \frac{1}{2\widehat{s}} \frac{d^{d-1}l}{(2\pi)^{d-1}\, 2l_0} \frac{d^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}\, 2q_0} \left|\overline{M}(\varepsilon)\right|^2 (2\pi)^d\, \delta^d(p + \overline{p} - l - q) \qquad \text{(E.21)}$$

I conti che manipolano gli spazi delle fasi della sezione §6.1.1 possono procedere in modo assolutamente identico: si tratta solo di "pensare in $d-1$ dimensioni" invece che in 3, ma formalmente non ci sono differenze di sorta. Arriviamo allora a

$$d\widehat{\sigma} = \frac{1}{2\widehat{s}} \frac{dl_{\parallel} d^{d-2} l_{\perp}}{(2\pi)^{d-1}\, 2l_0} \left|\overline{M}(\varepsilon)\right|^2 (2\pi) \delta \left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{s} l_0\right) \qquad \text{(E.22)}$$

che sostituisce la (6.10).

Anche il calcolo dell'ampiezza di scattering $\left|\overline{M}(\varepsilon)\right|^2$ procede in modo perfettamente simile, con due variazioni:

- la costante di accoppiamento forte g deve essere accompagnata da un fattore con le dimensioni di una massa μ^{ε} per ripristinare l'adimensionalità, come già discusso per la costante elettromagnetica e;

- l'espressione della ampiezza di scattering Born $\left|\overline{M}_0\right|^2$ va ovviamente sostituita con quella d-dimensionale $\left|\overline{M}_0(\varepsilon)\right|^2$ calcolata più sopra in questa Appendice.

Fatte queste modifiche giungiamo alla formula per l'elemento di sezione d'urto partonica che generalizza la (6.23)

$$d\widehat{\sigma} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 \left\{ C_F \frac{4\alpha_s \mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{dl_\parallel}{l_0} \frac{d^{d-2} l_\perp}{l_\perp^2} \right\} \delta\left(\widehat{s} - Q^2 - 2\sqrt{\widehat{s}} l_0\right) \tag{E.23}$$

Il passaggio allo spazio del parametro di impatto b e dei momenti N-esimi si realizza attraverso le trasformazioni dirette di Fourier e di Mellin. Il fatto di essere in d dimensioni non apporta alcuna variazione significativa alla procedura seguita nella sezione §6.3. In questo caso tuttavia il passaggio agli spazi di b ed N non sarebbe strettamente necessario, poichè non c'è la necessità di disaccoppiare gli spazi delle fasi di più gluoni emessi.

Indichiamo esplicitamente anche la trasformazione inversa di Fourier ma non quella inversa di Mellin: difatti la prima è formalmente diversa in d dimensioni poichè interviene su variabili che sono in questo caso vettori $(d-2)$-dimensionali, mentre la trasformazione di Mellin è assolutamente identica. Continuiamo a lavorare, allora, sul momento della sezione d'urto partonica.

Il risultato ricalca la (6.63) ed è[1]

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 \frac{1}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^{d-2}} \int d^{d-2}b \; e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \\ \left\{ \int C_F \frac{4\alpha_s \mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{d-2}} \frac{dl_\parallel}{l_0} \frac{d^{d-2} l_\perp}{l_\perp^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_\perp}} e^{-N'\frac{2}{Q}l_0} \right\} \end{aligned} \tag{E.24}$$

Anche l'integrazione sulla componente longitudinale dentro il fattore $\{\dots\}$ non riserva sorprese. Ripercorriamo i calcoli di §6.4: passiamo alla variabile l_0; integriamo con il cutoff superiore dato dal fattore esponenziale $e^{-N'\frac{2}{Q}l_0}$ e trascuriamo gli addendi che non apportano termini di LLA.

E' importante notare che, agli effetti di questo conto, consideriamo fissa la costante di accoppiamento α_s.

Arriviamo finalmente a

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} \left|\overline{M_0}(\varepsilon)\right|^2 \frac{1}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^{d-2}} \int d^{d-2}b \; e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \\ \left\{ \int C_F \frac{d^{d-2} l_\perp}{(2\pi)^{d-2}} \frac{4\alpha_s \mu^{2\varepsilon}}{l_\perp^2} e^{-i\vec{b}\cdot\vec{l_\perp}} \ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2 \frac{1}{l_\perp^2}\right] \Theta\left(\frac{Q}{2N'} - l_\perp\right) \right\} \end{aligned} \tag{E.25}$$

Fino a questo punto il passaggio a d dimensioni non ha fatto altro che apportare correzioni formali alle formule calcolate nel Capitolo 6. E' nella

[1] Per comodità si pone anche qui $N' = N - 1/2$.

integrazione sulla variabile $l_\perp$ che stiamo per compiere che la regolarizzazione dimensionale mostra la sua utilità: infatti è a questo punto che si espongono le divergenze soffici e collineari che la regolarizzazione permette di trattare.

Dobbiamo svolgere l'integrazione sulla variabile $(d-2)$-dimensionale $l_\perp$: l'integranda è funzione del modulo $l_\perp$ $\left(= \left|\overrightarrow{l_\perp}\right|\right)$ eccetto che nell'esponente del fattore oscillante, che vale

$$e^{-i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{l_\perp}} = e^{-il_\perp b\cos\vartheta} \tag{E.26}$$

Passiamo allora a coordinate polari $(d-2)$-dimensionali con

$$d^{d-2}l_\perp = \frac{1}{2}l_\perp^{-2\varepsilon}dl_\perp^2 d\vartheta\,(\sin\vartheta)^{-2\varepsilon}\,d\Omega_{d-3} \tag{E.27}$$

dove quindi abbiamo isolato la variabile radiale $l_\perp^2$ e separato dalle altre una delle variabili angolari (ϑ);[2] il fattore $d\Omega_{d-3}$ rappresenta l'elemento di volume delle rimanenti variabili angolari, che non compaiono nella integranda. Per il generico elemento di volume in k dimensioni si dimostra che

$$\int d\Omega_k = \frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)} \tag{E.28}$$

In questo caso, quindi:

$$\int d\Omega_{d-3} = \frac{2\pi^{1/2-\varepsilon}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} \tag{E.29}$$

Allora la parte angolare dell'integrazione ammonta a

$$\int_0^\pi d\vartheta\,(\sin\vartheta)^{-2\varepsilon}\,e^{-ibl_\perp\cos\vartheta} \tag{E.30}$$

Sviluppando il fattore $(\sin\vartheta)^{-2\varepsilon}$ in ε si ha $1-2\varepsilon\ln\sin\vartheta+\ldots$. Quindi all'ordine ε^0, ossia $\mathcal{O}(1)$, si produce un integrale che si può mettere in relazione con la funzione di Bessel $\mathbf{J}_0$:

$$\int_0^\pi d\vartheta e^{il_\perp b\cos\vartheta} = \pi\mathbf{J}_0(l_\perp b) \tag{E.31}$$

[2]E' certamente sempre possibile adattare il sistema di coordinate in modo che sia ϑ la variabile angolare tra i vettori $\overrightarrow{b}$ ed $\overrightarrow{l_\perp}$.

All'ordine ε e all'ordine ε^2 si producono due fattori del tipo $\varepsilon \int_0^\pi d\vartheta \ln \sin\vartheta \cdot e^{il_\perp b \cos\vartheta} = A(l_\perp b)$ e $\varepsilon^2 \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{2} \ln^2 \sin\vartheta \cdot e^{il_\perp b\cos\vartheta} = B(l_\perp b)$ (dove A e B sono funzioni incognite).

Trattenendo solo il termine di $\mathcal{O}(1)$ arriviamo a

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = \frac{2\pi}{2\widehat{s}} q_f^2 e^2 \mu^{2\varepsilon}(1-\varepsilon)\widehat{s}\frac{1}{Q^2}\frac{1}{(2\pi)^{d-2}}\int d^{d-2}b\; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}} \left\{\int C_F \frac{dl_\perp^2}{(2\pi)^{2(1-\varepsilon)}}\right.$$
$$\left.\pi J_0(l_\perp b)\frac{2\pi^{1/2-\varepsilon}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\frac{4\alpha_s\mu^{2\varepsilon}}{l_\perp^{2(1+\varepsilon)}}\ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2\frac{1}{l_\perp^2}\right]\Theta\left(\frac{Q}{2N'}-l_\perp\right)\right\} =$$
$$= \int d^{d-2}b\; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}} \left\{2^{-2+4\varepsilon}\pi^{-\frac{3}{2}+3\varepsilon}\, C_F\frac{\alpha_s\mu^{2\varepsilon}q_f^2e^2\mu^{2\varepsilon}}{Q^2}\frac{(1-\varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}\right\}$$
$$\left[\int_0^{X^2}\frac{dl_\perp^2}{l_\perp^{2(1+\varepsilon)}}\ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2\frac{1}{l_\perp^2}\right]\right] \tag{E.32}$$

dove nell'ultimo passaggio si sono messi in opera i cutoff superiori per l'integrazione su $l_\perp^2$ dati dalla funzione di Bessel $\mathbf{J}_0$ e dalla Θ cinematica, definendo X^2.

Ipotizzando, come plausibile, che anche $A(l_\perp b)$ e $B(l_\perp b)$ si comportino come cutoff a valori dell'ordine di $l_\perp \sim 1/b$, complessivamente si ha, al posto dell'ultimo passaggio della precedente una formula come

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = \int d^{d-2}b\; e^{i\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\;\left(1+a\varepsilon+b\varepsilon^2\right)\{\dots\}[\dots] \tag{E.33}$$

(essendo a e b fattori numerici prodotti dalle integrazioni in ϑ che non ci interessa determinare).

L'integrazione in $l_\perp^2$ è il punto cruciale nel quale la regolarizzazione dimensionale mostra la sua utilità preservando dalle divergenze soffici e collineari. Per mettere in evidenza questo, semplifichiamo temporaneamente il problema e la notazione: il nocciolo dell'integrazione che dobbiamo affrontare, in 4 dimensioni ammonterebbe a

$$\int_0^{X^2}\frac{dl_\perp^2}{l_\perp^2}\ln l_\perp^2 \tag{E.34}$$

Questo integrale ha risultato divergente ed è stato regolarizzato con un cutoff inferiore λ^2 in §6.4. Invece in d dimensioni, il fattore $1/l_\perp^{2(1+\varepsilon)}$ è integrabile in zero (per valori di $\varepsilon > 0$).

L'integrazione in $l_\perp^2$ è ora possibile e si svolge con qualche astuzia secondo i seguenti passaggi:

$$\int_0^{X^2} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^{2(1+\varepsilon)}} \ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2 \frac{1}{l_\perp^2}\right] = \int_0^{X^2} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^{2(1+\varepsilon)}} \left[-\ln l_\perp^2 - \ln\frac{4N'^2}{Q^2}\right] =$$

$$= \int_0^{X^2} dl_\perp^2 \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(l_\perp^{-2(1+\varepsilon)}\right) - \ln\frac{4N'^2}{Q^2}\int_0^{X^2} dl_\perp^2\; l_\perp^{-2(1+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\int_0^{X^2} dl_\perp^2\; l_\perp^{-2(1+\varepsilon)}\right) - \ln\frac{4N'^2}{Q^2}\int_0^{X^2} dl_\perp^2\; l_\perp^{-2(1+\varepsilon)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{X^{2\varepsilon}}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{X^{2\varepsilon}}\ln\frac{4N'^2}{Q^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{X^{2\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{X^{2\varepsilon}}\ln\left(\frac{4N'^2}{Q^2}X^2\right) \quad \text{(E.35)}$$

Sviluppando in ε i termini in X^2 arriviamo allora a

$$\int_0^{X^2} \frac{dl_\perp^2}{l_\perp^{2(1+\varepsilon)}} \ln\left[\left(\frac{Q}{2N'}\right)^2 \frac{1}{l_\perp^2}\right] = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{4N'^2}{Q^2} - \frac{1}{2}\ln^2 X^2 - \ln X^2 \ln\frac{4N'^2}{Q^2} \quad \text{(E.36)}$$

Questo è la tipica struttura di un risultato in regolarizzazione dimensionale di una emissione reale: il polo di ordine ε^2 è prodotto dalla regolarizzazione delle divergenze soffici, che sono contemporaneamente anche collineari, mentre il polo di ordine ε proviene dalle divergenze collineari (non soffici). Secondo quanto discusso in §2.2, ci aspettiamo che l'aggiunta del contributo virtuale cancelli il polo $\frac{1}{\varepsilon^2}$ delle divergenze soffici ma non quello $\frac{1}{\varepsilon}$ delle divergenze collineari.

Prima di poter sommare il contributo dei gluoni virtuali dobbiamo però rielaborare l'espressione di quello reale per uniformare le notazioni.

I termini del fattore $\{\dots\}$ nella (E.32) vanno sviluppati in ε fino all'ordine ε^2; in particolare, per sviluppare il termine con la funzione Γ si usa la relazione

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \varepsilon\ln 4 - \varepsilon^2\frac{1}{6}(\pi^2 - 3\ln^2 4)\right)\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} \quad \text{(E.37)}$$

Gli sviluppi si contraggono tra loro e con il risultato (E.36) della integrazione: conserviamo solo i termini di ordine $1/\varepsilon^2$, $1/\varepsilon$ e 1. Osserviamo ora che i fattori $(1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)$, contratti con il risultato del passaggio in (E.36), danno origine a termini di ordine $1/\varepsilon$ (non accompagnati da logaritmi di N o di b) o di ordine 1 (non accompagnati da logaritmi quadrati di N o di b); si tratta quindi di termini trascurabili in LLA. Semplifichiamo le notazioni trascurandoli fin da subito.

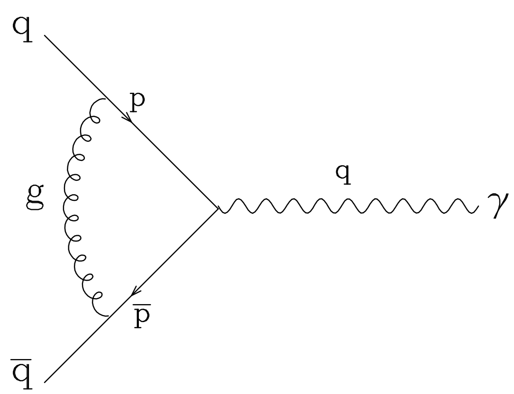


Figura E.3: Correzione virtuale (di vertice) per l'annichilazione di quark e antiquark in fotone.

Con qualche riassestamento si arriva allora a

$$\left.\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp}\right]_{reale} = \int d^{d-2}b\ e^{i\,\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}}\ \left\{\frac{\alpha_s}{2}C_F\left(4\pi\mu^2\right)^\varepsilon\frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{Q^2}\frac{1}{(2\pi)^{2-2\varepsilon}}\frac{1-\varepsilon}{\Gamma\left(1-\varepsilon\right)}\right\}$$
$$\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+\frac{2}{\varepsilon}\left(\ln\frac{N'^2}{Q^2}\right)-\ln^2 X^2-2\ln X^2\ln\frac{4N'^2}{Q^2}\right.$$
$$\left.-2\ln 4\cdot\ln\frac{4N'^2}{Q^2}-\frac{1}{3}(\pi^2-3\ln^2 4)\right] \quad (E.38)$$

Questa è la forma finale che desideriamo dare al contributo della radiazione reale, raffigurata in fig.E.2.

Il contributo delle correzioni virtuali a NLO corrisponde al grafico in fig.E.3. La formula (83) della ref.[17] presenta il termine virtuale per la sezione d'urto totale, avendo convenzionalmente normalizzato a 1 il termine dell'ordine di Born; esso è dato da

$$1+\frac{\alpha_s}{2\pi}C_F\left(4\pi\mu^2\right)^\varepsilon\frac{1}{Q^{2\varepsilon}}\frac{\Gamma\left(1-\varepsilon\right)}{\Gamma\left(1-2\varepsilon\right)}\left[-\frac{2}{\varepsilon^2}-\frac{3}{\varepsilon}-8+\frac{2}{3}\pi^2\right] \quad (E.39)$$

Per passare alla sezione d'urto differenziale rispetto al momento trasverso ($(d-2)$-dimensionale) $\overrightarrow{q_\perp}$ del bosone vettore dobbiamo introdurre una $\delta^{d-2}(\overrightarrow{q_\perp})$ che esprimiamo come

$$\delta^{d-2}(\overrightarrow{q_\perp}) = \frac{1}{(2\pi)^{d-2}}\int d^{d-2}b\, e^{i\,\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{q_\perp}} \quad (E.40)$$

Inoltre:

- moltiplichiamo per la sezione d'urto totale di Born, con l'identificazione $\widehat{s} = Q$,

- espandiamo in ε fino all'ordine ε^2 il rapporto tra le funzioni Γ usando $\frac{\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)} = \left(1 - \frac{1}{6}\pi^2\varepsilon^2\right)\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)}$

- sviluppiamo in ε il fattore $\frac{1}{Q^{2\varepsilon}}$.

Fatte le dovute contrazioni (conservando come al solito solo i termini fino all'ordine 1) quello che otteniamo è

$$\left.\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp}\right]_{virtuale} = Born + \int d^{d-2}b\; e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \left\{\frac{\alpha_s}{2} C_F \left(4\pi\mu^2\right)^\varepsilon \frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{Q^2}\frac{1}{(2\pi)^{2-2\varepsilon}} \frac{1-\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\right\}\left[-\frac{2}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\left(2\ln Q^2 - 3\right) - \ln^2 Q^2 + 3\ln Q^2 - 8 + \pi^2\right] \quad (E.41)$$

E' ora possibile sommare il contributo reale e quello virtuale: si verifica esplicitamente la cancellazione del termine di ordine $\frac{1}{\varepsilon^2}$ come ci attendevamo.

La somma dei due contributi dà

$$\left.\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp}\right]_{reale\;+\;virtuale} = Born + \int d^{d-2}b\; e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \left\{\frac{\alpha_s}{2} C_F \left(4\pi\mu^2\right)^\varepsilon \frac{e^2\mu^{2\varepsilon}}{Q^2} \frac{1}{(2\pi)^{2-2\varepsilon}}\frac{1-\varepsilon}{\Gamma(1-\varepsilon)}\right\}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(2\ln N'^2 - 3\right) - \ln^2 X^2 - 2\ln X^2 \ln\frac{4N'^2}{Q^2} - 2\ln 4\cdot\ln\frac{4N'^2}{Q^2} - \ln^2 Q^2 + 3\ln Q^2 + \ln^2 4 - 8 + \frac{2}{3}\pi^2\right] \quad (E.42)$$

Fatta la somma delle due formule possiamo sbarazzarci di tutti i termini contenenti ε all'esponente, facendone come al solito lo sviluppo (ora è sufficiente procedere fino all'ordine ε) e contraendo con il termine $[\ldots]$: si usa l'espansione $\frac{1}{\Gamma(1-\varepsilon)} = 1 - \gamma\varepsilon$ (essendo γ la costante di Eulero) e si arriva a

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = Born\cdot\left(1 + C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^{d-2}b\; e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}} \left[\left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln\mu^2 + \ln 4\pi^2 - 1 + \ln\mu^2\right)\left(2\ln N'^2 - 3\right) - \ln^2 X^2 - 2\ln X^2\ln\frac{4N'^2}{Q^2} - 2\ln 4\cdot\ln\frac{4N'^2}{Q^2} - \ln^2 Q^2 + 3\ln Q^2 + \ln^2 4 - 8 + \frac{2}{3}\pi^2\right]\right) \quad (E.43)$$

In tutti i calcoli di regolarizzazione dimensionale si produce una ben determinata combinazione di fattori che accompagnano il polo $\frac{1}{\varepsilon}$, e così è anche in questo caso. Lo schema di rinormalizzazione denominato $\overline{MS}$ prescrive di rimpiazzare formalmente (cfr. per esempio [42])

$$\frac{1}{\varepsilon} - \gamma + \ln 4\pi + \ln \mu^2 \rightsquigarrow - \ln \frac{\mu^2}{\nu^2} \tag{E.44}$$

essendo ν una scala arbitraria di energia (il cutoff infrarosso). Non c'è nulla di sostanziale in questa sostituzione, poichè all'andamento divergente della prima quantità per $\varepsilon \to 0$ si è soltanto sostituito quello divergente della seconda per $\nu \to 0$: le divergenze collineari guastano ancora l'espressione a cui siamo arrivati.

Inoltre osserviamo che per grandi N

$$C_F(2 \ln N'^2 - 3) = -2P_{qqN} \tag{E.45}$$

essendo P_{qqN} il momento della funzione di splitting $P_{qq}(z)$, associata alla radiazione di un gluone da parte di un quark

$$P_{qq}(z) = C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ \tag{E.46}$$

Per verificarlo direttamente, applichiamo la trasformazione di Mellin ed esplicitiamo la definizione della prescrizione + (cfr. nota 10 del Cap.2):

$$\begin{aligned} P_{qqN} &= \int_0^1 dz\ z^{N-1} P_{qq}(z) = \int_0^1 dz\ z^{N-1} C_F \left(\frac{1+z^2}{1-z} \right)_+ = \\ &= C_F \int_0^1 dz\ \left(z^{N-1} - 1 \right) \frac{1+z^2}{1-z} \end{aligned} \tag{E.47}$$

Osserviamo che per grandi N vale la relazione

$$\left(z^{N-1} - 1 \right) \simeq -\Theta \left(1 - \frac{1}{N} - z \right) \tag{E.48}$$

quindi

$$\begin{aligned} P_{qqN} = C_F \int_0^{1-1/N} dz\ \frac{1+z^2}{z-1} &= C_F \left(-2 \ln N + \frac{3}{2} + \frac{1}{2N^2} - \frac{2}{N} \right) \\ &\simeq C_F \left(-\ln N^2 + \frac{3}{2} \right) \end{aligned} \tag{E.49}$$

Raccogliendo queste quantità e rielaborando le rimanenti (con un po' di fatica sui vari logaritmi) si giunge a

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = Born \cdot \Bigg(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^{d-2}b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}\ \Bigg[2P_{qqN}\ln\frac{\mu^2}{\nu^2} + C_F\Bigg(-\ln^2\frac{X^2}{\mu^2} - 2\ln\frac{4X^2}{\mu^2}\ln N'^2 + 2\ln N'^2\ln 4 - 2\ln\frac{X^2}{\mu^2}\ln\frac{4\mu^2}{Q^2} - \ln^2\frac{4\mu^2}{Q^2} - 3\ln\frac{4\mu^2}{Q^2} + \big(2\ln N'^2 - 3\big)\ln\pi^2 + \frac{2}{3}\pi^2 - 5\Bigg)\Bigg]\Bigg) \tag{E.50}$$

La formula precedente si decompone in

$$\frac{d\widehat{\sigma}_N}{d^{d-2}q_\perp} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^{d-2}b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}\ Born \cdot \left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qqN}\ln\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qqN}\ln\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)\left(1 + C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}(\dots)\right) \tag{E.51}$$

(il termine $(\dots)$, come è intuitivo, contiene tutti gli addendi che nella formula precedente stanno nella parentesi più interna): si ritorna alla precedente sviluppando i prodotti di convoluzione e trascurando i termini di ordine α_s^2 e successivi.

Questo rappresenta il risultato finale per il momento della sezione d'urto partonica. Si osservi che la divergenza infrarossa collineare è stata isolata nei due primi termini (uguali) che hanno un carattere universale (nascerebbero da ogni conto di questo tipo): si tratta della verifica dell'universalità delle divergenze collineari prevista dallo schema dell'Improved Parton Model e dalle equazioni di Altarelli-Parisi.

Questo risultato va convoluto con i momenti delle funzioni di struttura e antitrasformato rispetto a Mellin per ottenere la quantità adronica

$$\frac{d\sigma}{d^2q_\perp} = Born\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN\tau^{-N}F_{1,N+1}F_{2,N+1} \left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qqN}\ln\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha_s}{2\pi}P_{qqN}\ln\frac{\mu^2}{\nu^2}\right)\left(1 + C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}(\dots)\right) \tag{E.52}$$

Secondo la prescrizione dell'Improved Parton Model, i termini contenenti le divergenze vengono assorbiti dalle funzioni di struttura, che diventano dipendenti dalla scala di fattorizzazione (continuiamo comunque ad indicarle con la stessa notazione). Rimaniamo pertanto con la formula conclusiva

$$\frac{d\sigma}{d^2q_\perp} = Born\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2b\ e^{i\vec{b}\cdot\vec{q_\perp}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} dN\tau^{-N}F_{1,N+1}F_{2,N+1}$$
$$\left(1+C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}\left(-\ln^2\frac{X^2}{\mu^2}-2\ln\frac{X^2}{\mu^2}\ln\frac{4N'^2\mu^2}{Q^2}-\ln^2\frac{4\mu^2}{Q^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.-3\ln\frac{4\mu^2}{Q^2}+\left(2\ln N'^2-3\right)\ln\pi^2+\frac{2}{3}\pi^2-5\right)\right) \qquad \text{(E.53)}$$

Restringendosi a considerare solo i termini di livello LLA (ossia i doppi logaritmi in b o in N, o in una combinazione dei due - si ricordi che $\ln X^2$ è di fatto un termine logaritmico in b o in N -) della formula precedente, il fattore correttivo di ordine α_s alla sezione d'urto di Born assume la forma molto più semplice

$$1+C_F\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[-\ln^2\frac{X^2}{\mu^2}-2\ln\frac{4N'^2\mu^2}{Q^2}\ln\frac{X^2}{\mu^2}\right] \qquad \text{(E.54)}$$

Appendice F

Programmi Fortran

In questa Appendice riportiamo la parte originale del programma Fortran utilizzato per le integrazioni attinenti alle trasformazioni inverse di Mellin e Fourier presentate nel Capitolo 7.

Esso richiama la routine VEGAS per la reale implementazione delle integrazioni bidimensionali.

```
CCC        INTEGRALEDOPPIO.F
c      Produce la distribuzione in qt ad un tau richiesto
CCC        BLOCCO A
       implicit none
       real * 8 xl,xu,acc
       integer ndim,ncall,itmx,nprn
       common/bveg1/xl(10),xu(10),acc,ndim,ncall,itmx,nprn
       integer minchoice
       real * 8 xlam,xmass,pi
       common/totale/xlam,xmass,pi,minchoice
       integer recn
       character datafilename * 50
       real * 8 qt
       common/ab/qt,recn,datafilename
       real * 8 tau,xmu,cf,b0,bmax
       common/ac/tau,xmu,cf,b0,bmax
       real * 8 fun
       real * 8 av,sd,chi2
```

```
      integer j
      real * 8 minqt,maxqt,stepqt
      external fun
      character factscale * 10
c       inizializzazione costanti e limiti per vegas
      ndim=2
      acc=0.01
      do j=1,ndim
         xl(j)=0
         xu(j)=1
      enddo
      ncall=3000
      itmx=10
      nprn=0
c       apertura file di output
      write(*,*) '>Enter data file name'
      read(*,*) datafilename
      open(unit=1,file=datafilename,status='unknown')
c        inizializzazione costanti generali
      pi=acos(-1.d0)
      b0=(33-2*5)/(12*pi)
      xlam=0.2
      xmass=10
      recn=2
      bmax= 2.0d0
      cf=4.d0/3.d0
c        richieste input
      write(*,*) '>Factorization scale:  '
      write(*,*) '>type m for mu=m, type hm for mu=m/2'
      read(*,*) factscale
      if (factscale.eq.'m') then
         xmu=xmass
      else
         xmu=xmass/2
      endif
      write(*,*) '>Enter tau'
      read(*,*) tau
      write(*,*) '>Analytic form of minimum:'
      write(*,*) '>type 1 for sum of squares,
                  type 2 for square of sum'
      read (*,*) minchoice
```

```
      write(*,*) '>Enter lower limit of qt'
      read(*,*) minqt
      write(*,*) '>Enter upper limit of qt'
      read(*,*) maxqt
      write(*,*) '>Enter step for qt'
      read(*,*) stepqt
c        scrittura intestazione file di output
      write(1,*) '(These data are computed by
                 INTEGRALEDOPPIO.F using:'
      write(1,*) '(accuracy:',acc
      write(1,*) '(mass:',xmass
      write(1,*) '(real part of N:',recn
      write(1,*) '(factorization scale:  ',factscale
      write(1,*) '(tau:',tau
      write(1,*) '(analytic form of minimum:',minchoice
      write(1,*) '(lower extreme of qt:', minqt
      write(1,*) '(upper extreme of qt:',maxqt
      write(1,*) '(step for qt:',stepqt
      write(1,*) '(bmax:',bmax
c        calcolo dell'integrale per ogni qt fissato
      do qt=minqt,maxqt,stepqt
         call vegas(fun,av,sd,chi2)
         write(*,*) 'qt:',qt,' res:',av,' +-',sd,' chi2=',chi2
         write(1,*) qt, av
      enddo
      write(1,*) 'join'
      write(1,*) ''
      write(1,*) ''
      write(1,*) ''
      write(*,*) 'done:  ', datafilename
      end
CCC     BLOCCO B
      function fun(x,w)
      implicit none
      integer minchoice
      real * 8 xlam,xmass,pi
      common/totale/xlam,xmass,pi,minchoice

      integer recn
      character datafilename * 50
      real * 8 qt
```

```
      common/ab/qt,recn,datafilename
      integer reachedpole
      real * 8 fun,x(2),w,xnlandau,stepb,dbesj0,b,effenp,gi2,qzero
      complex * 16 ci,cformfac,cn

      data ci/(0,1)/
      cn= recn + ci * x(1)/(1-x(1))
      b= x(2)/(1-x(2))
      gi2= 0.4
      qzero= 2
      effenp= exp( -(gi2 * (b**2) * log(xmass/(2*qzero))) )
c        definisce l'integranda
      fun = (1/ (2.0d0 *pi)) * (1/(1-x(2))**2) * (1/(1-x(1))**2)
     #      * b * dbesj0(b*qt) * cformfac(cn,b) * effenp
      end
CCC     BLOCCO C
      function cformfac(cn,b)
c         costruzione fattore di Sudakov (complesso)
      implicit none
      integer minchoice
      real * 8 xlam,xmass,pi
      common/totale/xlam,xmass,pi,minchoice
      real * 8 tau,xmu,cf,b0,bmax
      common/ac/tau,xmu,cf,b0,bmax
      real * 8 xlogq,b,bstar
      complex * 16 cminq,csuda,cntilde,strucfnc,xlog2q,cminq1,cminq2
      complex * 16 cn,cformfac
      cntilde = cn !-0.5d0
      bstar= b/sqrt(1+(b/bmax)**2)
      xlogq = log((xmu**2)/(xlam**2))
      xlog2q = log((xmass**2)/(4*(cntilde**2)*(xmu**2)))
      cminq1 = 1/(bstar**2 + (4*(cntilde**2))/xmass**2)
      cminq2 = 1/(bstar + 2*cntilde/xmass)**2
      if (minchoice.eq.1) then
         cminq=cminq1
      else
         cminq=cminq2
      endif
      csuda = cf/(pi*b0) * ( (xlogq + xlog2q) *
     #       log( 1 + (log(cminq/(xmu**2)))/xlogq)
     #       - log(cminq/(xmu**2)))
```

```
strucfnc = 6/(cn*(cn+1)*(cn+2))
cformfac = exp(csuda)*exp(-log(tau)*cn)*(strucfnc**2)
end
```

Bibliografia

[1] Yu.L.Dokshitzer, D.I.Dyakonov, S.I.Troyan, “Hard semi-inclusive processes in QCD”, *Phys.Lett.* **78B**(1978)290

[2] Yu.L.Dokshitzer, D.I.Dyakonov, S.I.Troyan, “On the transverse momentum distribution of massive lepton pairs”, *Phys Lett.* **79B**(1978)269

[3] Yu.L.Dokshitzer, D.I.Dyakonov, S.I.Troyan, “Hard processes in Quantum Chromodynamics”, *Phys.Rep.* **58**(1980)270

[4] G.Altarelli, R.Parisi, R.Petronzio, “Transverse momentum in Drell-Yan processes”, *Phys.Lett.* **76B**(1978)351

[5] G.Altarelli, R.Parisi, R.Petronzio, “Transverse momentum of muon pairs produced in hadronic collisions”, *Phys.Lett.* **76B**(1978)356

[6] P.Aurenche, J.Lindfors, “Important non-leading QCD corrections to $W^{\pm}$ and Z^0 production in hadronic collisions”, *Phys.Lett.* **96B**(1980)171

[7] R.K.Ellis, G.Martinelli, R.Petronzio, “Lepton pair production at large transverse momentum in second order QCD”, *Nucl.Phys.* **B211**(1983)106-138

[8] P.B.Arnold, M.H.Reno, “The complete computation of high-pt W and Z production in second order QCD”, *Nucl.Phys.* **B319**(1989)37-71; Erratum: *Nucl.Phys.* **B330**(1990)284

[9] R.J.Gonsalves, J.Pawlowski, C.-F.Wai, “QCD radiative corrections to electroweak-boson production at large transverse momentum in hadron collisions”, *Phys.Rev.* **D40**(1989)2245

[10] G.Parisi, R.Petronzio, “Small transverse momentum distributions in hard processes”, *Nucl.Phys.* **B154**(1979)427

[11] J.C.Collins, D.E.Soper, G.Sterman, "Transverse momentum distribution in Drell-Yan pair and W and Z boson production", *Nucl.Phys.* **B250**(1985)199

[12] J.C.Collins, D.E.Soper, "Back-to-back jets in QCD", *Nucl.Phys.* **B193**(1981)381-443; Erratum: *Nucl.Phys.* **B213**(1983)545-546

[13] J.C.Collins, D.E.Soper, "Back-to-back jets in QCD: Fourier transform from b to k_T", *Nucl.Phys.* **B197**(1982)446-476

[14] R.K.Ellis, D.A.Ross, S.Veseli, "Vector boson production in hadron collisions", *Nucl.Phys.* **B503**(1997)309-338; `hep-ph/9704239`

[15] R.K.Ellis, S.Veseli, "W and Z transverse momentum distribution: resummation in q_T-space", *Nucl.Phys.* **B511**(1998)649; `hep-ph/9706526`

[16] S.Frixione, P.Nason, G.Ridolfi, "Problems in the resummation of soft-gluon effects in the transverse-momentum distributions of massive vector bosons in hadronic collisions", *Nucl.Phys.* **B542**(1999)311-328; `hep-ph/9809367`

[17] G.Altarelli, R.K.Ellis, G.Martinelli, "Leptoproduction and Drell-Yan processes beyond the leading approximation in chromodynamics", *Nucl.Phys.* **B143**(1978)521

[18] G.Parisi, "Summing large perturbative corrections in QCD", *Phys.Lett.* **B90**(1980)295

[19] G.Curci, M.Greco, "Large corrections in QCD processes", *Phys.Lett.* **B92**(1980)175

[20] G.Curci, M.Greco, "Soft corrections to the Drell-Yan process in QCD", *Phys.Lett.* **B102**(1981)280

[21] G.Sterman, "Summation of large corrections to short distance hadronic cross sections", *Nucl.Phys.* **B281**(1987)310-364

[22] S.Catani, L.Trentadue, "Resummation of QCD perturbative series for hard processes", *Nucl.Phys.* **B327**(1989)323-352

[23] S.Catani, M.L.Mangano, P.Nason, L.Trentadue, "The resummation of soft gluons in hadronic collisions", *Nucl.Phys.* **B478**(1996)273-310; `hep-ph/ 9604351`

[24] P.Nason, S.Dawson, R.K.Ellis, "The total cross-section for the production of heavy quark in hadronic collisions", *Nucl.Phys.* **B303**(1988)607

[25] P.Nason, S.Dawson, R.K.Ellis, "The one particle inclusive differential cross-section for heavy quark production in hadronic collisions", *Nucl.Phys.* **B327**(1989)49-92; Erratum: *ibid.* **B355**(1990)260

[26] E.Laenen, J.Smith, W.L.van Neerven, *Nucl.Phys.* **B369**(1992)543

[27] E.Laenen, J.Smith, W.L.van Neerven, "Top quark production cross section", *Phys.Lett.* **B321**(1994)254; `hep-ph/9310233`

[28] E.L.Berger, H.Contopanagos, "Perturbative gluon resummation of the top-quark production cross section", *Phys.Lett.* **B361**(1995)115; `hep-ph/9507363`

[29] R.Bonciani, S.Catani, M.L.Mangano, P.Nason, "NLL resummation of the heavy quark hadroproduction cross section", *Nucl.Phys.* **B529**(1998)424-450; `hep-ph/9801375`

[30] E.L.Berger, R.Meng, "Transverse momentum distributions for heavy quark pairs", *Phys.Rev.* **D49**(1994)3248-3260; `hep-ph/9310341`

[31] P.Nason, "Soft gluon resummation in heavy flavour production" talk given at La Thuile, 1996, in Results and perspectives in particle physics, 591-605; `hep-ph/9607430`

[32] N. Kidonakis, "QCD resummation and heavy quark cross.sections", Ph.D.Thesis, UMI-96-36628, May 1996, 124pp; `hep-ph/9606474`

[33] S.Frixione, M.Mangano, P.Nason, G.Ridolfi, "Heavy quark production" in "Heavy flavours II" ed. A.J.Buras, Mlindner, World Scientific, Singapore; `hep-ph/9702287`

[34] M.L.Mangano, "Two lectures on heavy quark production in hadronic collisions", Talk given at International School of Physics, 'Enrico Fermi': Heavy Flavor Physics - A Probe of Nature's Grand Design, Varenna, Italy, 8-18 Jul 1997.In *Varenna 1997, Heavy flavour physics* 95-137; CERN-TH-97-328, Nov 1997; `hep-ph/9711337`

[35] N.Kidonakis, R.Vogt, "Soft gluon resummation for heavy quark production in hadronic collisions", *Phys.Rev.* **D59**(1999)074014; `hep-ph/9806526`

[36] M. Beneke, “Top quark production near threshold”, Talk given at High Energy Physics International Euroconference on Quantum Chromo Dynamics - QCD ’99, Montpellier, France, 7-13 Jul 1999, CERN-TH-99-281, Sep 1999. 8pp; `hep-ph/9910534`

[37] CDF Collaboration (F. Abe et al.), “Inclusive jet cross-section in anti-p p collisions at $\sqrt{S} = 1.8\ TeV$”, *Phys.Rev.Lett.* **77**(1996)438-443, `hep-ex/9601008`

[38] G.’t Hooft, “Can we make sense out of QCD?”, in “The whys of subnuclear physics”, ed. A.Zichichi, Plenum Press, 1978

[39] G.Altarelli, “Partons in QCD”, *Phys.Rep.* **81(1)**(1982)

[40] D.Amati, A.Bassetto, M.Ciafaloni, G.Marchesini, G.Veneziano, “A treatment of hard processes sensitive to the infra-red structure of QCD”, *Nucl.Phys.* **B173**(1980)429

[41] A.Bassetto, M.Ciafaloni, G.Marchesini, “Jet structure and infrared sensitive quantities in perturbative QCD”, *Phys.Rep.* **100(4)**(1983)201-272

[42] M.E.Peskin, D.V.Schroeder, “An introduction to QFT”, Addison-Wesley, Reading, 1995

[43] T.Muta, “Foundations of QCD”, World Scientific, Singapore, 1987

[44] S.Weinberg, “The Quantum Theory of Fields - Volume 1: Foundations”, Cambridge University Press, 1995

[45] A.H.Zemanian, “Generalized Integral Transformation”, Interscience Pubblishers, 1968

[46] P.Nason, “Introduction to Quantum Chromodynamics”, lecture notes, http://www.ge.infn.it/˜ridolfi/